2版

様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月　8 日現在

機関番号：13101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：24740056

研究課題名（和文）再埋蔵的視点から見た閉曲面上のグラフの１－交差埋め込みに関する研究

研究課題名（英文）1-Embeddings on closed surfaces from the viewpoint of re-embeddings

研究代表者
鈴木　有祐（Suzuki, Yusuke）

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：10390402

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：各辺高々一回の交差を許して平面に描画されたグラフを1-平面グラフ（もしくは閉曲面の1-交差埋め込み）という．我々は，これらのグラフの“埋め込み方”そのものから議論を行うことで，従来の研究結果とは一線を画すいくらかの成果を得ることに成功した．特に，オーストラリアのEades氏等との共同研究においてはローテーションが与えられたグラフに対する極大1-平面性の判定が線形時間で可能であることを証明した．また，向き付け不可能な閉曲面を三角形分割する最適1-平面グラフが存在しないことも証明した．

研究成果の概要（英文）：A graph is said to be 1-planar (or 1-embedding of a closed surface) if the graph can be drawn on the sphere (or the surface) so that each edge has at most one crossing point with another edge. In this research, we discuss 1-planar graphs (or 1-embeddings of closed surfaces) from the viewpoint of “re-embeddings”of those graphs, and obtained some results around this topic, which are clearly different from past results. In particular, in the joint work with Prof. Eades in Australia, we had shown that the problem of testing maximal 1-planarity of a graph can be solved in linear time, if a rotation system is given. Furthermore, we could prove that there exists no optimal 1-planar graph which can triangulate a non-orientable surface.

研究分野：位相幾何学的グラフ理論

キーワード：1-平面グラフ　1-交差埋め込み　閉曲面　三角形分割

１．研究開始当初の背景

平面グラフは 4-彩色可能（四色定理）であるが，グラフの面にも色を与えることにするとどのようなことが起こるだろう？このような素朴な問題提起より，1965 年に Ringel によって 1-平面グラフ（平面上の 1-交差埋め込み）の概念が創出された.（特に，平面上の 1-交差埋め込みを“ 1-平面グラフ ”と呼ぶ.）1984 年，Borodin により「任意の 1-平面グラフは 6-彩色可能である」という定理が示されたことによりこの問題は解決をみたが，本格的にこのグラフのクラスが脚光をあびることになるのは，Mohar と Korzhik (2009) により，「(A) 辺の除去に関して極小な非 1-平面グラフは無限個存在する」，「(B) 1-平面性の判定問題は NP-完全のクラスに属する」という，平面グラフとの大きな差異が示されてからである．特に上記（A）の結果は，これらのグラフが辺の縮約に関して閉じておらず，グラフ・マイナー理論（有限の極小グラフを使い全体をコントロールする）によって扱いづらいクラスであることを示唆している.

研究代表者は，この 1-平面グラフに関して当初スロバキアの Madaras 教授らとともに，（ある不変量に着目し）研究を行っていたが，「グラフが既に平面上にあるもの」とみなしていたため，平面グラフとの違いを明確に述べることができていなかった．ところがその埋め込み方のバリエーションも含めて議論を行ってみると，1-交差埋め込みと非常に相性がよく，「任意の最適（辺数の上限を与える）1-平面グラフの埋め込みはただ一つの例外を除いて一意的である」という定理を証明することに成功した.（例外グラフの再埋蔵構造も完全に理解できている.）

２．研究の目的

閉曲面上に辺の公差なく埋め込まれたグラフは一般的に“ グラフ・マイナー理論 ”と相性がよく，従来の研究はこれらに依存するものがほとんどである．しかし，“ 埋め込み ”の条件を多少緩和しただけである 1-交差埋め込みはこれらの手法で扱えないクラスであることが知られており，そのコントロール方法は未知な部分が多い．本研究においては，グラフの埋め込み方そのものから議論を行うことで（再埋蔵理論），1-交差埋め込みの構造を解明していくことを目標とした．また，計算機科学分野との境界に位置する問題へのアプローチも視野に入れ研究を遂行した.

３．研究の方法

従来の位相幾何学的グラフ理論における“ 再埋蔵理論 ”がどこまで 1-平面グラフに適用可能か？というところを丁寧に検証しながら議論を進めた．似ている部分は従来の結果を大いに活用し，異なる部分は新たな理論を構築することにより問題解決を試みた．具体的には，あらかじめ各頂点にローテーション（隣接頂点からなる順列）を与えたグラフを考えることにより，対象となるグラフを扱いやすくしたり，最適 1-平面グラフがもつ特別な部分グラフ（面歩道や全域四角形分割）の構造に着目したりした.

４．研究成果

得られた主な結果は以下の５つである.

(1)各頂点にローテーションが与えられたグラフが極大 1-平面的かどうかの判定が，線形時間で可能であることを証明した．この研究はオーストラリアの Eades 教授等との共同研究である．この命題を証明するために，極大 1-平面グラフの構造に言及したいくらかの定理や補題を示している．特に，「任意の極大 1-平面グラフに対して，その非交差辺が誘導するグラフは 2-連結全域部分グラフである」という事実は主定理の証明の鍵となっており，今後の研究においても有用であると思われる.

(2) 閉曲面の三角形分割，四角形分割，最適 1-交差埋め込みの関係を，“（互いの）全域部分グラフ ”という観点から調査し，以下の定理を証明することに成功した.

定理 A 頂点数が 6 以上の任意の四角形分割は，各面に対角辺を加えることにより，4-連結三角形分割に拡張可能である.（“ 4（-連結）”は最善である.）

この定理の系として，「任意の最適 1-平面グラフは 4-連結三角形分割を全域部分グラフにもつ」という事実もえられた（図１参照).
さらに上述の結果を利用して，「任意の最適 1-平面グラフはハミルトン閉路をもつ」という既存の定理に簡潔な照明を与えることに成功した.

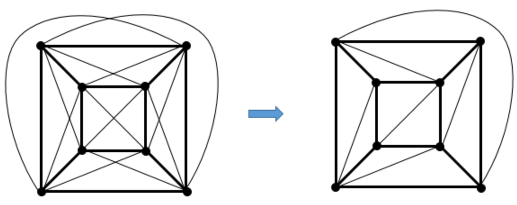

図１　4-連結四角形分割部分グラフ

(3) 射影平面上の最適 1-交差埋め込みの再埋蔵に関して，「非交差辺からなる四角形分割が 2 部グラフであるような射影平面上の最適 1-交差埋め込みの，埋め込みの総数が 24 以下である」ことを証明した．この証明を行う際には，以前の研究で得ていた，射影平面上の極小な最適 1-交差埋め込みのリストを用いた．また，それらの再埋蔵を考える際，計

算機を用いて異なる埋め込みを列挙した．“2部グラフ”という条件を外した際には，ある特定の構造を含まなければ，その埋め込みの総数が有限個になると予想している．

(4)「定理　球面以外の任意の向き付け可能閉曲面 F に対して，F を三角形分割する最適 1-平面グラフが存在する（図２参照）」という事実に対して，向き付け不可能閉曲面に関しては種数の低い（4 以下）ところの結果しか存在していなかった．

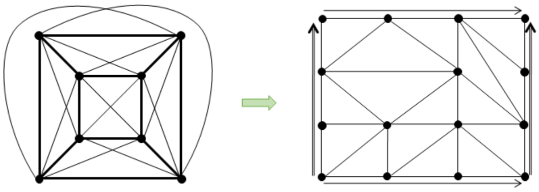

図２　トーラス上の三角形分割

平成 27 年度には，東京電機大学の野口氏，新潟大学の長澤氏との共同研究の結果として，この近辺の問題を大きく進展させることができた．得られた結果は以下の通りである．

定理 B　任意の向き付け不可能閉曲面 F に対して，F を三角形分割する最適 1-平面グラフは存在しない．

我々は研究開始当初，そのような最適 1-平面グラフが存在するものと予想し，計算機を用いて実験を行っていた．ところが，種数を大きくしていってもそのようなグラフを見つけることができなかったため，上述の事実を“予想”として，それを理論的に証明するべく研究を行った．その証明の中では，特別な面歩道が問題解決の鍵となっているが，その構造を注意深く観察することにより，「定理　最適 1-平面グラフが他の閉曲面に三角形分割可能であれば，その三角形分割は少なくとも 2 つ存在する」という事実を示すこともできた．また，射影平面上の最適 1-交差埋め込みに関して，「定理　種数 g の向き付け可能閉曲面 S_g に三角形分割可能な射影平面上の最適 1-交差埋め込みが存在するための必要十分条件は，g>2 となることである」と「定理　種数 k の向き付け不可能閉曲面 N_k に三角形分割可能な射影平面上の最適 1-交差埋め込みが存在するための必要十分条件は，k>3 となることである」という 2 つのきれいな特徴づけを得ることができた．

(5) 与えられたグラフが完全グラフ K_n (n≥6) をマイナーにもつかどうかを判定することは難しい．ところが，これを閉曲面上の三角形分割に限定すると，いくらかのきれいな特徴づけが存在する．例えば向江氏らによって示された「定理　射影平面上の三角形分割 G が K_6-マイナーをもたないための必要十分条件は，G が K_4-四角形分割を部分グラフにもたないことである」は，簡潔できれいな結果である．一般に，閉曲面 F^2 上に辺の交差無く埋め込まれたグラフが K_n-マイナーもつ際には，その n の値に（F^2 に依存した）明らかな上界が存在することに注意せよ．我々は，最適 1-平面グラフに対してこの種の問題を考えるべく研究を行い，手始めに以下の結果を得た．

定理 C　任意のグラフ H に対して，H を位相的マイナーにもつ最適 1-平面グラフ G が存在する．

“位相的マイナー”は単なる“マイナー”より強い概念であり，定理 C が辺の交差の無い埋め込みのそれとは大きく異なる結果であることが見て取れる．（例えば，頂点数のとても大きい完全グラフ K_n を H として与えたとしても，それをマイナーにもつ G が存在する．つまり，n の値には閉曲面に依存した上界が存在しない．）完全グラフのマイナーに絞ってこの問題を考えた際，Mader(1968)の結果を用いることにより，以下の定理がただちに得られる．

定理 D　任意の最適 1-平面グラフは K_6-マイナーをもつ．

上述の定理 D より，7 頂点完全グラフをマイナーにもつ最適 1-平面グラフに関する研究を行い，それに関する構成的な特徴づけを得ることに成功した．図３のグラフは，K_7-マイナーをもつ最適 1-平面グラフの一例である．

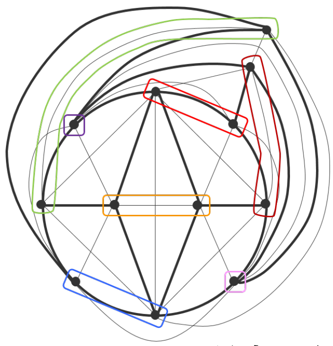

図３　K_7-マイナーをもつ最適 1-平面グラフ

この結果を，2015 年 6 月にスロベニアで開催された国際会議“8th Slovenian Conference on Graph Theory”にて発表した．また，この内容に興味を持った Soeg-Jin 教授から招聘され，韓国高等科学院（KIAS）の主催する Workshop で招待講演を行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５　件）

① S. Hong, P. Eades, N. Kato, G. Liotta, P. Schweitzer, Y. Suzuki, A linear-time algorithm for testing outer-1-planarity, ***Algorithmica*** **72** (2015) 1033-1054, （査読有り）
DOI 10.1007/s00453-014-9890-8.

② K. Noguchi, Y. Suzuki, Relationship among triangulations, quadrangulations and optimal 1-planar graphs, ***Graphs Combin.*** **31** (2015), 1965-1972, （査読有り）
DOI 10.1007/s00373-015-1568-8.
DOI 10.1007/s00373-011-1063-9.

③ P. Eades, S. Hong, N. Kato, G. Liotta, P. Schweitzer, Y. Suzuki, A linear time algorithm for testing maximal 1-planarity of graphs with a rotation system, ***Theoret. Comput. Sci.*** **513** (2013) 65--76, （査読有り）
DOI 10.1016/j.tcs.2013.09.029.

④ D. Král', B. Mohar, A. Nakamoto, O. Pangrác, Y. Suzuki, Coloring Eulerian triangulations of the Klein bottle, ***Graphs Combin.*** **28** (2012), 499-530, （査読有り）

⑤ D. Hudác, T. Madaras, Y. Suzuki, On properties of maximal 1-planar graphs, ***Discuss. Math. Graph Theory*** **32** (2012) 737-747. （査読有り）
DOI 10.7151/dmgt.1639.

〔学会発表〕（計　12　件）

① 鈴木　有祐, 最適 1-交差埋め込みの K_7-マイナーについて, 第 27 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2015 年 11 月 14 日.

② Y. Suzuki, K_7-Minors in optimal 1-planar graphs, The Second Japan-Sino Symposium on Graph Theory, Combinatorics and Their Applications, Morito Memorial Hall(Tokyo University of Science), 2015 年 11 月 2 日.

③ Y. Suzuki, Recent works on optimal 1-planar graphs, The 9th KIAS Combinatorics Workshop, Broom Vista (Korea), 2015 年 9 月 12 日.

④ 鈴木　有祐, K_7-Minors in optimal 1-planar graphs, 離散数学とその応用研究集会 2015, 熊本大学工学部百周年記念館, 2015 年 8 月 23 日.

⑤ Y. Suzuki, K_7-Minors in optimal 1-planar graphs, 8th Slovenian Conference on Graph Theory, Ramada Resort (Kranjska Gora, Slovenia), 2015 年 6 月 26 日.

⑥ 鈴木 有祐, 多面体的四角形分割に対する縮小操作について, 日本数学会 2014 年度会, 学習院大学, 2014 年 3 月 15 日.

⑦ 鈴木 有祐, 閉曲面上のグラフの生成定理について, 第 10 回組合せ論若手研究集会, 慶應義塾大学矢上キャンパス, 2014 年 2 月 24 日.

⑧ 鈴木 有祐, 多面体的四角形分割に対する減少操作について, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2013 年 12 月 21 日.

⑨ Y. Suzuki, Cube-contractions in 3-connected quadrangulations, The 25th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, Yokohama National University, 2013 年 11 月 22 日.

⑩ 鈴木　有祐, Cube-contractions in 3-connected quadrangulations, 離散数学とその応用研究集会 2013, 山形市保健センター・視聴覚室, 2013 年 8 月 10 日.

⑪ Y. Suzuki, Cube-contractions in 3-connected quadrangulations on surfaces, The Sixth Workshop Graph Embeddings and Maps on Surfaces, Smolenice castle, Slovakia, 2013 年 7 月 18 日.

⑫ 鈴木 有祐, 再埋蔵的視点から見たグラフの 1-交差埋め込み, 日本数学会・秋季総合分科会・分科会特別講演, 九州大学, 2012 年 9 月 18 日.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~y-suzuki/

６．研究組織

(1)研究代表者

鈴木 有祐　（SUZUKI YUSUKE）
新潟大学・自然科学系・准教授
　研究者番号：10390402

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし