様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在


機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2013
課題番号：２４７４００５９


研究課題名（和文）離散可積分系による数列のハンケル変換理論の構築と組合せ論への応用

研究課題名（英文）The Hankel transform and discrete integrable systems


研究代表者
上岡　修平（Kamioka, Shuhei）

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：７０５４３２９７



交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,200,000円、（間接経費）　360,000円



研究成果の概要（和文）：数列のHankel変換では，Hankel型の行列式を計算することにより既存の数列から新たな数列を構成する。本研究では数列のHankel変換を離散可積分系の視点から解析し，特に格子路の言葉で組合せ論的に記述される数列のHankel変換と行列式解を持つ離散可積分系との関係を調べた。さらに応用として離散戸田分子等の可積分系の初期値問題を考察し，初期値問題の厳密解に対して非交叉格子路による組合せ論的な表示を与えた。また組合せ論への応用として非交叉格子路と関連深いアステカダイヤモンドのタイリング問題を扱い，特にタイリングの数え上げ定理に対して離散可積分系および直交関数を用いた新たな証明を与えた。

研究成果の概要（英文）：The Hankel transform makes a new sequence of numbers from a given sequence of numbers by computing Hankel determinants of the given numbers. In this study the Hankel transform is examined from the viewpoint of discrete integrable systems having determinant solutions which relate with combinatorial objects such as lattice paths. The results are applied to initial value problems of discrete integrable systems. Especially combinatorial expressions in terms of non-intersecting lattice paths are given to the exact solutions to the initial value problems of the discrete Toda molecules and related integrable systems. Furthermore a tiling problem of the Aztec diamond is also investigated. To the Aztec diamond theorem a new proof is exhibited by using discrete integrable systems with the help of orthogonal functions.



研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数理物理　可積分系　組合せ論　行列式　Aztec diamond　非交叉径路　タイリング　完全マッチング

## １．研究開始当初の背景

Fibonacci 数や Catalan 数等の組合せ論的数を扱う際，既存の数列を変換して新たな数列をつくる変換操作がしばしば現れる。そのような変換の一つに Hankel 変換がある。Hankel 変換では既存の数列の各項を成分に持つ Hankel 型の行列式により新たな数列を構成する。Hankel 変換は非線形かつ非可逆な数列変換の典型例であり，近年の整数列研究における一大トピックになっている。

Hankel 変換が注目を集める理由の一つに，組合せ論における非交叉径路の数え上げ問題との関係がある。例えば Dyck 路と呼ばれる格子路のある非交叉的な配置の総数は，Catalan 数の Hankel 変換により求めることができる。この事実の背景にあるのは行列式と非交叉径路を結び付ける Gessel−Viennot−Lindström の補題である。Hankel 変換等の行列式計算の理論は，組合せ論（タイリング，Young 盤の数え上げ等）のみならず統計力学(vicious walks，界面成長の確率解析等)のような分野においても，非交叉径路との関連から重要度を増している。

数列の Hankel 変換は行列式の計算であり，特に行列式の次数に関する一般項の導出が求められる。行列式の計算法には，古典的な LU 分解から近年では Krattenthaler（1999）の公式まで様々あるが，どれにも向き不向きがあり，任意の行列式に対して有効に機能する訳ではない。Hankel 変換にも同様の事情があり，変換前の数列の構造に応じて上手い計算法を見つける必要がある。この数列の「構造」とそれに対応する Hankel 変換の「計算法」の組を具体的かつ系統的に構成すること，さらにその結果を組合せ論の問題に応用することが本研究の大目標であった。

## ２．研究の目的

本研究の主目的は数列の構造とそれに対応する Hankel 変換の計算法の組を，離散可積分系と格子路を用いて系統的に構成することである。さらにその結果を組合せ論の問題に応用する。具体的な目的は次の２点である。

⑴　離散可積分系は厳密解を陽的に書き下すことのできる離散力学系の総称であり，典型的に行列式により記述される解を持つ。申請者は離散可積分系および関連する直交関数，連分数の組合せ構造に関する研究の中で次の知見を得た：離散可積分系の一つである離散戸田分子は Hankel 型の行列式により記述される行列式解を持つが，解の記述に用いる行列式の各成分は，Dyck 路と呼ばれる格子路の重み和の形で与えることができる。この知見は Padé 近似の計算法である qd アルゴリズムに対する Viennot（2000）の組合せ論的解釈とも符合する。特に次の結論を導く：数列を Dyck 路の重み和の形で与えるとき，その Hankel 変換は離散戸田分子の時間発展方程式を用いて計算可能である。

本研究ではこの考えを他の離散可積分系および付随する格子路に対して敷衍する。すなわち行列式解を持つその他の離散可積分系（離散相対論戸田分子，非自励離散戸田分子等）に対して，付随する格子路の構造を見出す。さらに格子路の重み和の形で与えられる数列の Hankel 変換を，離散可積分系の時間発展方程式を用いて計算する。

⑵　アステカダイヤモンドをドミノで敷き詰めるとき，可能な敷き詰め方（タイリング）は何通りあるか。この数え上げ問題は厳密に解くことのできる可解なタイリング問題の先駆けとして注目を集めた（Elkies－Kuperberg－Larsen－Propp，1992）。Johansson（2002）はこのアステカダイヤモ

ンドのタイリング問題が，ある非交叉格子路の数え上げ問題として等価に解釈可能であることを示した。特に Gessel–Viennot–Lindström の補題により，タイリング問題は large Schröder 数と呼ばれる組合せ論的数を成分に持つ Hankel 行列式の計算に帰着する（Eu–Fu, 2005）。

本研究ではアステカダイヤモンドのタイリング問題に現れる Hankel 行列式に対して，離散可積分系（および関連する直交関数，連分数）による Hankel 変換の計算法を適用する。それによりタイリング問題に対して新しい証明法を提示し，さらにはタイリング問題の離散可積分系の視点からの拡張・一般化を試みる。

## ３．研究の方法

研究の目的の(1)および(2)を達成するために次の(1)および(2)を実施した。また可積分系への応用として(3)を行った。

(1)　行列式解を持つ離散可積分系（離散相対論戸田分子，非自励離散戸田分子等）に対して，それに対応する格子路の構造を明らかにする。そのために次の２種類の方法を用いる。

方法１：離散可積分系に付随する直交関数の組合せ構造を明らかにし，そこから格子路の構造および適切な重みの付け方を同定する。

方法２：離散可積分系に付随する連分数に対して Flajolet（1980）の手法を適用することにより，格子路の構造および適切な重みの付け方を求める。

結果として，行列式解を記述する行列式の各成分に対して，格子路の重み和の形の組合せ論的な和公式を得る。その際，離散可積分系の時間発展方程式は，自動的に Hankel 変換計算（行列式計算）のための漸化式として利用可能となる。

(2)　(1)の離散相対論戸田分子に関する結果をアステカダイヤモンドのタイリング問題に応用する。離散相対論戸田分子は，直交関数としては Laurent 双直交多項式と関連深い。これらを道具として用いることにより，行列式計算（Hankel 変換）の観点から，アステカダイヤモンドのタイリングに関する既知の事実に対する新しい証明を与える。

(3)　(1)の結果の応用として，可積分系の初期値問題を扱う。特に行列式解を Gessel–Viennot–Lindström の補題を用いて格子路の言葉で解釈することにより，初期値問題の厳密解に対して組合せ論的な表示を与える。

## ４．研究成果

次の(1)および(2)に示す成果を得た。(1)は格子路に基づく Hankel 変換の手法が，可積分系の厳密解の解析のために利用可能であることを示している。特に非自励化や超離散化といった可積分系の重要な技法とも上手く両立する手法であることが分かった。(2)は可解タイリング問題の典型例であるアステカダイヤモンドのタイリング問題に対する応用である。

(1)　既知の事実として離散戸田分子には Dyck 路と呼ばれる格子路が対応する。すなわち離散戸田分子の行列式解を記述するための Hankel 型の行列式において，行列式の各成分は Dyck 路の重み和の形で表示することができる。この事実が，実は離散戸田分子の拡張である非自励離散戸田分子，さらには連続時間の対応物である通常の（連続）戸田分子に対しても同様に成立することを示した。さらなる応用として，離散戸田分子，非自励離散戸田分子，（連続）戸田分子の初期値問題の解に対して，非交叉 Dyck 路の言葉で記述される厳密な表示を与えた。この成果を得

るにあたっての鍵は，研究の方法(1)により適切な格子路を見出した上で，格子路の重み和に対する Hankel 変換を Gessel－Viennot-Lindström の補題を用いて組合せ論的に解釈する点である。

可積分系へのさらなる応用として，離散戸田分子の結果から，超離散戸田分子の初期値問題の解の厳密な表示を得た。この表示はある格子グラフ上の最短路問題を用いて記述される組合せ論的なものである。

(2) Elkies-Larsen-Kuperberg-Propp (1992) によるアステカダイヤモンドの重み付きタイリング問題に関する定理に対して，Laurent 双直交多項式および離散相対論戸田分子（Sylvester の行列式恒等式）による行列式計算（Hankel 変換）に基づく全く新しい証明を与えた。研究の方法(1)により，離散相対論戸田分子は Schröder 路と呼ばれる格子路に対応する。一方で Johansson (2002) によりアステカダイヤモンドのタイリングは非交叉 Schröder 路と一対一に対応することが知られている。これらの事実を合わせることにより，定理の証明を q-Narayana 多項式を成分に持つ Hankel 型の行列式の計算に帰着させることに成功した。行列式計算そのものは，離散相対論戸田分子の時間発展方程式による Hankel 変換の計算であり，容易に実行することが可能である。

以上のようにアステカダイヤモンドのタイリング問題は，離散相対論戸田分子を用いて厳密に解くことができる。この事実は次の可能性を示唆する：他の離散可積分系に対しても上手く適合するタイリング問題を見出すことができれば，そのタイリング問題は離散可積分系を用いることにより厳密に解くことができる。この点に関しては将来の検討課題である。

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）


① 上岡修平，ローラン双直交多項式とアステカダイヤモンド定理，九州大学応用力学研究所研究集会報告，2014（予定），査読有り

② Shuhei Kamioka, Laurent biorthogonal polynomials, q-Narayana polynomials and domino tilings of the Aztec diamonds, Journal of Combinatorial Theory, Series A 123 (2014), 14-29, 査読有り

③ Shuhei Kamioka, Tomoaki Takagaki, Combinatorial expressions of the solutions to initial value problems of the discrete and ultradiscrete Toda molecules, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 46 (2013), 355203, DOI: 10.1088/1751-8113/46/35/355203, 査読有り

④ 上岡修平，格子路の組合せ論から見た可積分系とその周辺，RIMS Kokyuroku Bessatsu B41 (2013)，73-84，査読有り

⑤ 上岡修平，離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化，九州大学応用力学研究所研究集会報告 24AO-S3(21)，2013，134-139，査読有り


〔学会発表〕（計１２件）


① 上岡修平，アステカダイヤモンドのタイリング定理の拡張，第 10 回日本応用数理学会研究部会連合発表会，2014 年 3 月 20 日，京都大学吉田キャンパス

② 上岡修平, Laurent biorthogonal polynomials, q-Narayana polynomials and domino tilings of the Aztec diamonds, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学目白キャンパス

③ 上岡修平, 可積分系, 直交多項式, 連分数からの組合せ問題へのアプローチ, 有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式, 2014 年 2 月 1 日, 一橋大学

④ Shuhei Kamioka, Laurent biorthogonal polynomials, q-Narayana polynomials and domino tilings of the Aztec diamonds, Algebraic Combinatorics and Representation Theory Seminar at KIAS, 2014 年 1 月 20 日, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea Republic

⑤ 上岡修平, ローラン双直交多項式とアステカダイヤモンド定理, 平成 25 年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の拡がり」, 2013 年 11 月 1 日, 九州大学筑紫地区筑紫ホール

⑥ 上岡修平, 戸田分子の初期値問題の解の組合せ論的な表示, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学城北キャンパス

⑦ 清水恭輔, 上岡修平, 確率ロジスティック方程式の差分化について, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013 年 9 月 9 日, アクロス福岡（福岡市）

⑧ 上岡修平, ローラン双直交多項式のモーメントとしての q-Narayana 多項式, 組合せ論サマースクール 2013, 2013 年 9 月 4 日, ホテル大観（岩手県盛岡市）

⑨ Shuhei Kamioka, Combinatorial expressions of solutions to an initial value problem of the discrete and ultradiscrete Toda lattices, China-Japan Joint Workshop of Integrable Systems 2013, 2013 年 3 月 19 日, 京都大学

⑩ 上岡修平, 離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化, 平成 24 年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の最前線－構造と現象の多様性－」, 2012 年 11 月 2 日, 九州大学

⑪ 上岡修平, 格子路の組合せ論から見た可積分系とその周辺, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形離散可積分系の拡がり」, 2012 年 8 月 21 日, 京都大学

⑫ Shuhei Kamioka, An enumerative problem on non-intersecting walks related to the discrete Toda equation and Laurent biorthogonal polynomials, Symmetries and Integrability of Difference Equations 10, 2012 年 6 月 12 日, Xikou, Ningno, China

## ６．研究組織

(1)研究代表者

上岡　修平（Shuhei Kamioka）
京都大学・大学院情報学研究科・助教
研究者番号：70543297

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：