

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740075

研究課題名(和文)非線形射影の視点からの極大単調作用素の零点問題の研究

研究課題名(英文)Zero point problems of maximal monotone operators from the view of nonlinear projections

研究代表者

茨木 貴徳 (Ibaraki, Takanori)

横浜国立大学・教育人間科学部・准教授

研究者番号：90345439

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、工学や経済学等で応用される極大単調作用素の零点問題を扱い、解への近似法である近接点法の研究を行った。特に距離射影に着目し、その非拡大性である(P)型写像の性質の解明および関連する零点問題・不動点問題の近似法の研究を行い、解への新しい近似法を提案した。また、(P)型写像に関連が深い(R)型写像に関する不動点問題の解への近似法の成果も得た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we deal with zero point problems of maximal monotone operators which have applied to other research fields such as engineering, economics, and the others. We investigated the proximal point algorithms for finding their problems. In particular, we focused on the concept of the metric projection and study the nonexpansivity of the metric projection, that is a mapping of type (P). We proposed algorithms for finding a solution of the zero point problem and the fixed point problem which related to the metric projection. We also proposed algorithms for finding a fixed point of a mapping of type (R), which is related to a mapping of type (P).

研究分野：非線形関数解析学

キーワード：距離射影 (P)型写像 極大単調作用素 不動点近似法 近接点法 バナッハ空間

## 1. 研究開始当初の背景

極大単調作用素の零点問題(以下,零点問題)は,数学のみならず工学,オペレーションズ・リサーチ,数理経済学等のさまざまな分野の非線形問題を定式化した問題である.非線形関数解析学においては,不動点問題,凸最小化問題,均衡問題等と密接なかわりを持っており,多くの数学者によって解の存在定理や点列を用いた解への近似定理等の研究がなされてきた.

特に,1970年代の Martinet, Rockafellar の研究を基礎にした零点問題の解を求める近接点法の研究は現実的な問題に対する具体的なアプローチであり,応用面からも非常に重要な研究である.この近接点法の研究には非線形射影という概念が重要な役割を果たしている.非線形射影の概念は,バナッハ空間上では古くから距離射影とサニー非拡大射影が古くから知られていたが,1996年に Alber によって導入された準距離射影の導入によりバナッハ空間における近接点法の研究は飛躍的に発展してきた.

しかし,最も代表的な距離射影に関連した近接点法の研究に関しては,未だ満足できる結果が得られていない.距離射影の非拡大性に関しては2009年に青山-高阪-高橋が(P)型写像の概念を導入し研究が進められたが,その後は期待されたほど進展はしていないのが実情である.一方,零点問題の近接点法に関する結果の特徴として,非拡大型非線形写像の不動点問題における点列近似法の手法と類似している事実がある.このことより距離射影の非拡大性である(P)型写像の解明及びその不動点近似法の解明が進めば,距離射影に関連する零点問題の解決への手がかりになると予想できる.以上の観点から,バナッハ空間における(P)型写像の性質の解明とその不動点問題の研究は,零点問題の解決の重要な課題であるといえよう.

## 2. 研究の目的

本件研究の目的は,バナッハ空間上の距離射影に関連した零点問題の近接点法の解明を行うことである.それには,距離射影の非拡大性が重要であり.そのため,距離射影の非拡大性である(P)型写像の不動点問題の解決も重要な役割を果たすことが予想される.そのため,(P)型写像に関する不動点近似法の解明も行う.また,不動点近似法の理論を活用するために,不動点理論と零点問題の関係の解明も必要である.さらに,非線形射影いや非拡大型非線形写像には双対性や対称性が解明されている.それゆえ,他の非線形射影に関する非線形問題との比較検討も行う.

- (1) 距離射影および(P)型写像の性質の解明
- (2) 他の非線形射影に関連した零点問題の

## 近接点法との比較検討

- (3) (P)型写像の不動点問題と距離射影の零点問題の関係の解明
- (4) (P)型写像の不動点近似法の解明
- (5) 距離射影に関連した零点問題の近接点法の解明

## 3. 研究の方法

本研究の方法は研究の中核をなす距離射影の非拡大性である(P)型写像の解明と極大単調作用素の零点問題の理論構築の為の考察を行い,零点問題および不動点問題の解へのアルゴリズムの理論的考察を中心に研究の発展拡充をはかる.以下,具体的な研究目的を達成するための研究計画・方法を述べる.

- (1) 本研究の中核をなす距離射影の非拡大性である(P)型写像の性質の解明を行う.特に,不動点近似法において必要とされる性質の解明を中心に研究を行う.
- (2) (P)型写像に関する不動点問題とその周辺分野の非線形問題との比較・検証を行い,他の非線形問題への近似方の手法が不動点問題へ適用の可能性を探る.
- (3) 距離射影に関連する零点問題の近接点法と不動点近似法の関係性の検証を行い,近接点法と不動点近似法の理論的構築を行う.
- (4) 他の非線形射影での近似法の手法と比較・検討を行う.これまでの研究において非線形射影や非拡大型写像には双対性や対称性が解明されており,これらの視点から,距離射影に関する近接点法や不動点近似法への新たな知見を得る.
- (5) 上記で得られた成果のさらなる研究の発展拡充をはかる.

## 4. 研究成果

本研究課題の成果として第一にバナッハ空間における非拡大型非線形写像の弱収束に関する不動点近似法の成果が挙げられる.バナッハ空間において点列の収束性を議論する際には弱収束と強収束の2つの収束の概念がある.それぞれの収束性を議論する際には手法は異なる.さらに,弱収束の手法を議論する際にも種々の手法があり,本件研究課題では代表的な Mann 型, Pazy 型, Baillon 型の手法を扱った.

近接点法を議論する際には非線形射影の非拡大性が重用になる.本研究課題の中核である距離射影が満たす非拡大性は(P)型写像として定義され議論されている.(P)型写像の解明は難解であるので多角的な視点で考察を行った.(P)型写像は,本研究代表者がこれまで研究を行ってきた(R)型写像と呼ばれる写像との間に恒等写像との差を取ることによって裏表の関係にあることが知られている.(R)型写像の定義にはノルム関数を利用した非負値の2変数関数を利用しているが,この関数の代わりにノルム関数より一般的

な凸関数を用いたブレグマン距離の概念を用いて再定義(以下, ブレグマン(R)型写像)を行った. そして, このクラスを含む写像に関しての不動点近似法の考察・研究を行い次の成果を得ることができた.

(1) Mann は 1953 年にバナッハ空間において非線形射影との不動点を求めるため恒等写像と非拡大型非線形写像との凸結合で点列を構成する手法を導入し, 1979 年に Reich がこのアイデアで不動点近似法の成果を得た. 不動点近似法において代表的な手法である. バナッハ空間におけるブレグマン(R)型写像に関して Mann 型の手法を用いて不動点への弱収束定理を得ることができた.

(2) Pazy は 1971 年にヒルベルト空間において非拡大写像の不動点の存在性と定義域および値域の有界性が同値であることを示し, さらにこの場合には非拡大写像のオービットが不動点へ弱収束することも示した. この成果は近似法のみならず不動点の存在性の成果として代表的な手法である. バナッハ空間におけるブレグマン(R)型写像に関して Pazy 型の不動点の存在定理と, その条件を満たす場合にはブレグマン(R)型写像のオービットが不動点へ弱収束する成果を得ることができた.

(3) Baillon は 1975 年にヒルベルト空間において非拡大写像のオービットの平均で構成された点列が弱収束し, その収束先の特徴付けを行った. 各点から収束先への写像はエルゴード射影と呼ばれている. これは非線形エルゴード定理として非線形関数解析学で重要な成果であり, この Baillon 手法においてもバナッハ空間におけるブレグマン(R)型写像に関して平均収束よりも強い成果である, オービットの弱収束性まで示すことができた. また, その弱収束先もエルゴード射影型の射影で特徴付けも成功した.

これらの成果は(R)型写像のクラスを抽象化することで不動点近似法に必要な写像の性質を浮き彫りしたことができたということである重要な成果であると考えられる.

第二に強収束に関するバナッハ空間における不動点近似法および近接点法の成果がある. Martinet, Rockafellar が提案した近接点法は, バナッハ空間における極大単調作用素の零点問題に関しては弱収束までしか示せないという限界がある. これは 1991 年に Guler が示している. それゆえ, より良い収束である強収束の成果を得るためには点列の構成に, さらなる工夫が必要になってくる.

強収束を得る手法にも種々の手法があるがここでは Halpern 型および縮小射影法を扱

った. 1967 年に Halpern が提案した有名な手法は, 点列を構成する際に単に写像の像を逐次的に構成していくのではなく, 初期点と写像の像の凸結合で次の点を構成する手法である. 一方, 2008 年に高橋・竹内・窪田が導入した新たな手法である縮小射影法がある. これは解集合を含む閉凸集合列を構成し, 固定した空間上の点からその集合列への射影した点で点列を構成する方法である. これらの手法に関して以下の成果を得ることができた.

(6) Halpern 型の手法を用いて, サニー準非拡大射影に関連する零点問題の強収束の研究を行った. Halpern 型の手法の考察を行い, 特に既に得られていた結果に対して係数列の条件を緩和することに成功した. また, この結果の応用として既に得られていた凸最小化問題のみならず, 変分不等式問題への適用にも成功した.

(7) 複数の写像に共通な不動点を求める共通不動点問題の研究を行った. この研究では W 写像と呼ばれる Mann 型の構成を入れ子にして構成された写像を, (R)型写像より条件を緩和した準非拡大型写像に適用した. この W 写像に対して縮小射影法を用いて共通不動点への強収束定理を得ることに成功した. また, (P)型写像, (R)型写像は構造が難解なゆえ, 具体的な例はあまり得られていなかったが準非拡大型写像に関して具体的な例を示した.

(8) 縮小射影法の点列を構成する際に射影した点に誤差も認めた近似法の研究を行った. これまでの誤差付きの近似法の研究では誤差が 0 に収束するような条件を課すことが多く, ステップ数が大きくなると実値にかなり近くなければいけないという課題があった. 今回取り入れた近似法では誤差が 0 に収束する必要がなく最終的な誤差を任意の範囲に設定することが可能である. (P)型写像と(R)型写像に加え, (R)型写像と共役空間を介して双対の関係にある(Q)型写像も含め 3 つのタイプの写像に関して誤差付きの縮小射影法を用いて, 不動点近似法の成果を得ることができた.

(9) (8)と同様の誤差付きの縮小射影法を用いて(P)型写像および(Q)型写像に関連する零点問題の近接点法に関する成果を得ることができた. 単調作用素の極大性はずすことにも成功した. さらに, この成果の応用として凸最小化問題へ適用することができ, (P)型写像および(Q)型写像の不動点問題へも適用できた. このことにより, 不動点問題と零点問題の関係の深さも示すことができた. なお, まだ投稿中の段階であるがヒルベルト空間においても誤差付きの縮小射影法を用いて, バナッハ空間の成果では仮定した

単調作用素の定義域の有界性の条件をはずした成果も得ている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

(1) T. Ibaraki and Y. Kimura, Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors, *Linear and Nonlinear Analysis*, 査読有, 掲載決定, 2016.

(2) T. Ibaraki, Approximation of a zero point of monotone operators with nonsummable errors, *Fixed Point Theory and Applications*, 査読有, 2016:48, 2016, 14 pages.  
DOI: 10.1186/s13663-016-0535-2

(3) T. Ibaraki, Strong convergence to common fixed points of families of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proceedings of the 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, 査読有, 2016, 143-161.

(4) T. Ibaraki, Weak convergence theorems for firmly generalized nonexpansive mappings with Bregman distances in Banach spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 査読有, Vol. 16, No. 11, 2015, 2207-2219.

<http://www.ybook.co.jp/online2/opjnca/vol16/p2207.html>

(5) T. Ibaraki, Weak convergence theorems for Bregman generalized nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proceedings of the 4th International Symposium on Banach and Function Spaces IV*, 査読有, 2014, 289-302.

[学会発表](計 14 件)

(1) T. Ibaraki, Shrinking projection methods with error for zero point problems in a Hilbert space, *The Fifth International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES 2015*, September 2-6, 2015, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, JAPAN.

(2) T. Ibaraki, Approximation of a zero point of maximal monotone operators with errors in a Hilbert space, *The 11th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications*, July 20-24,

2015, Galatasaray University, Istanbul, Turkey.

(3) T. Ibaraki, Weak convergence theorems for Bregman firmly generalized nonexpansive mappings in Banach spaces, *The 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, January 21-25, 2015, Rimkok Resort Hotel, Chiang Rai, Thailand.

(4) T. Ibaraki, Weak convergence theorems for nonlinear mappings of generalized nonexpansive type in a Banach space, *ICM Satellite Conference 2014: The Fourth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization*, August 5-9, 2014, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

(5) T. Ibaraki, Strong convergence theorems for zero point problems in a Banach space and its applications, *The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization*, December 20-22, 2013, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan.

(6) T. Ibaraki, A shrinking projection method for a family of mappings of type (P) and its applications, *The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, August 2-6, 2013, Hirosaki University, Hirosaki, Japan.

(7) T. Ibaraki, Shrinking projection methods for zero point problems and equilibrium problems in a Banach space, *International Conference Anatolian Communications in Nonlinear Analysis*, July 3-6, 2013, Abant İzzet Baysal University, Bolu, Turkey.

(8) T. Ibaraki, Shrinking projection methods for common fixed point problems in a Banach space, *The Fourth International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES*, September 12-15, 2012, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, JAPAN.

(9) T. Ibaraki, Shrinking projection methods for a family of generalized nonexpansive mappings in a Banach space, *The 10th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications*, July 9-15, 2012, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania.

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

茨木 貴徳 (IBARAKI TAKANORI)  
横浜国立大学・教育人間科学部・准教授  
研究者番号：90345439