様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００８６

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の初期値問題に対する空間周期的な解の存在と大域挙動

研究課題名（英文）Existence and global behavior of spatially periodic solutions to the initial value problems for nonlinear dispersive equations

研究代表者
岸本　展（Kishimoto, Nobu）

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：９０６１００７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では物理学や工学の諸分野において重要となる非線形分散型偏微分方程式の空間周期的な解の性質を調べた．特に，初期値問題の解の自然なクラスにおける一意性（無条件一意性）について研究し，多くの分散型方程式に適用できる証明の枠組みを与えるとともに，無条件一意性が未解決だったいくつかの具体的な問題に適用した．また，非線形シュレディンガー方程式や回転流体の方程式に対し，非線形相互作用の制御において重要と考えられる共鳴周波数間の相互作用を，組合せ論や初等整数論の技法を用いて解析した．

研究成果の概要（英文）：We investigated the spatially periodic solutions of nonlinear dispersive partial differential equations arising as important models in various fields of physics and engineering. In particular, we studied unconditional uniqueness for the initial value problem, namely, uniqueness of solutions in a natural class. We succeeded in providing a general framework applicable to a wide range of nonlinear dispersive equations, and applied it to some specific problems for which unconditional uniqueness had been open. Moreover, for the nonlinear Schroedinger equation and an equation for rotating fluids, we analyzed the interactions between resonant frequencies, which seem important in controlling the nonlinear interactions, by use of some techniques from combinatorics and elementary number theory.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形分散型方程式　初期値問題　適切性　周期境界条件　無条件一意性

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式は，自然科学の諸分野において重要な役割を占める一方で，非線形性のもたらす多様な効果により一般には解析が困難であり，解の存在でさえ非自明な場合も多い．そこで，初期値問題の適切性（解の一意存在と初期値の変化に対する安定性）が最も基本的で重要な問題の一つとなる．

量子力学に現れる非線形シュレディンガー方程式をはじめ，分散型と呼ばれるクラスの非線形偏微分方程式には数理物理において重要となる多くの方程式が含まれる．これらの方程式においては，異なる周波数の波が異なる速度で伝播することにより解は分散性を示し，ある種の平滑化効果が得られて，適切性の証明や解の性質の解析において本質的な役割を果たす．ところが空間周期的な状況（周期境界値問題）では分散性が弱いため平滑化効果が限定的であり，周期条件を課さない場合と比べて研究が遅れていた．

非線形分散型方程式の初期値問題を逐次近似で解くための手法として，1990 年代に Bourgain らにより導入されたフーリエ制限ノルム法は，周期条件の有無にかかわらず多くの分散型方程式に適用でき，適切性理論を飛躍的に進展させるとともに，今日でも世界中で精力的に研究されている．研究代表者のこれまでの研究では，いくつかの具体的な方程式を扱い，時空周波数領域に応じてフーリエ制限ノルムに修正を加えることで，より広いクラスの初期値に対する適切性の解明に成功した．

２．研究の目的

本研究では非線形シュレディンガー方程式やザハロフ方程式，KdV 方程式といった非線形分散型方程式の初期値問題を取り扱う．第一の目的は初期値問題の時間局所および大域適切性を広いクラスの（正則性の低い）初期値に対して解明することであり，得られた解に対する散乱や有限時間爆発といった大域挙動を調べることが第二の目的である．主として関数解析的な手法を用い，特に分散型方程式の解析において非常に有効なフーリエ制限ノルムを用いたこれまでの研究をさらに発展させる．特に本研究では初期値が空間周期性を持つ場合に興味がある．

３．研究の方法

初期値問題の適切性の証明にはフーリエ制限ノルム法を基本的な道具として用い，状況に応じて非線形構造に基づいた修正を加える．また，空間周期的な場合に有効な双線形タイプの時空評価式（ストリッカーツ型評価式）について改良を試みる．

周期境界条件下での非線形相互作用においては，方程式の線形部分に由来する時間振動が互いに打ち消し合うような特定の波数間の相互作用（共鳴相互作用）の制御が重要となる．このような相互作用による影響を見積もるには，ある等式（共鳴関係式）をみたす格子点の個数の評価を組合せ論的な考察によって得ることが有効と考えられる．

KdV 方程式などのように，共鳴相互作用においていわゆる微分の損失が現れる場合は，非線形方程式を線形からの摂動ととらえる逐次近似法は直接適用できないことがある．このような場合には，ゲージ変換等を用いて微分の損失を含む共鳴相互作用を持たない方程式に書き換えることや，方程式の非線形構造を利用して解のみたす先験評価式を導出するといった非摂動法的なアプローチを適宜取り入れ，フーリエ制限ノルム法等の摂動法的な議論と組み合わせることが有効と考えられる．

４．研究成果

(1) 空間 2 次元で非線形項が 3 次の非線形シュレディンガー方程式(NLS)について，2 乗可積分関数の空間(L2)は尺度変換で不変な臨界正則性の空間であり，ある意味で適切性が成り立つ最も広い空間と考えられている．L2 での時間局所適切性は周期境界条件を課さない場合には 1990 年，1 方向のみ周期的な場合も 2001 年に示されているが，純粋に周期的な状況では長年の未解決問題となっている．

この問題を完全に解決することはできなかったが，これまでの研究で示されていた「2 方向の周期の比が有理数の場合に初期値から解への対応が滑らかにならない」という周期条件下で特有の現象が，ある条件をみたす無理数比の場合にも起こることを示した．[論文(4)，学会発表(1,4,11,12).] この条件は無理数を有理数列で近似する際の精度に関するもので，数論におけるディオファントス近似の理論と関連している．さらに，連分数展開を用いてこの条件を書き換え，ほとんどすべての無理数はこれをみたすことや，2 次の代数的無理数はこれをみたさないことを示した．

周期が無理数比だと有理数比の場合のような組合せ論による精密な評価が困難となるが，既に分かっている有理数比の場合でうまく近似することにより結果が得られた．NLS の適切性とディオファントス近似・連分数展開といった数論分野との深いつながりを明らかにできた点が意義深い．L2 での適切性の解明には非線形構造のより精密な解析が必要であり，引き続き取り組むべき課題としたい．

(2) 惑星の大気のような回転する球面上の流体の運動を記述する非線形偏微分方程式を考察し，共鳴相互作用を引き起こす波数の分布の非等方性の根拠となる主張を，初等数論の手法を用いて証明した．［論文(1).］

数論・組合せ論的考察をもとに共鳴相互作用の寄与の大きさを評価する試みは，回転流体方程式のように共鳴相互作用が複雑な方程式を扱う際にますます重要になると予想され，ここではその技術を大いに進展させることができた．分散型方程式の手法による回転流体方程式の研究は近年発展しており，今回得られた成果や証明方法は，大域解の存在定理など今後の研究への応用が期待される．

(3) 当初予定していなかった初期値問題の解の無条件一意性と呼ばれる性質に関する研究で大きな成果があった．フーリエ制限ノルム法をはじめとする補助的な関数空間を用いた逐次近似法で解を構成する場合，その構成法によらない自然な関数空間における解の一意性（無条件一意性）は非自明な問題となる．全く異なる方法で得られた解であっても自然な関数空間に入っていれば同一のものとなることを保証するだけでなく，一意性の成り立つ範囲が一様であることから，極限操作や非線形変換等を介した別の方程式の解との関係を調べる際にも用いられ，基本的かつ重要な性質である．

ここ数年で，時間変数に関する部分積分を用いた方程式の変形（ノーマルフォーム）によって周期境界条件下での初期値問題の解の無条件一意性を示した結果がいくつか出ていたが，それらの証明は個々の方程式の非線形共鳴構造や平滑化等の詳細な性質に基づいた非常に緻密な議論を要し，場合によっては無限回の変形を行って無限個の非線形評価式を示すという難解な，いわば職人芸的な議論を展開する必要があった．

本研究では，既存の結果の精密化［学会発表(2,9,10)］を通してその証明の本質的な部分を見極め，シンプルかつ汎用性の高い無条件一意性のための十分条件を与えることに成功した．［論文(3)，学会発表(5-8).］また実際に空間次元・非線形項の次数を一般化したNLSや微分型NLS，ザハロフ方程式，修正ベンジャミン・オノ方程式に適用して無条件一意性を示した．特に空間２次元のザハロフ方程式は周期境界条件下でのエネルギー空間における適切性が最近まで知られていなかった困難な問題であり，今回与えた枠組みの有用性を示している．

この枠組みによれば，本来必要な無限個の非線形評価式は，基本となる数個の単純な評価式に帰着され，これらを示せば一般論から無条件一意性を導く先験評価式が得られる．これはちょうどフーリエ制限ノルム法において，方程式の構造に基づいた精密な評価が必要となるのは基本となる非線形評価式の証明のみで，それさえ示せば一般論から適切性が従う，という点と類似する．このように，方程式が与えられるごとに示すべき事柄がシンプルな形で明示されるような枠組みを与え，より多くの研究者がトライできるようになったことから，フーリエ制限ノルム法と同様に今後の本分野の進展に大いに資することが期待される．

(4) 前項で述べた無条件一意性の証明の一般的な枠組みにより，臨界の正則性の場合を除けば，時間変数に関して単に有界であるだけで必ずしも連続ではないような，いわゆる弱解のクラスでも一意性が示される．弱解の一意性については特異極限問題への応用が知られており，小さなパラメータを含む近似方程式の解がパラメータを０とする極限で元の方程式の解に強収束することを示せる場合がある．

本研究においても弱解の一意性をもとにいくつかの特異極限問題について解の強収束を示すことができた．［学会発表(3).］特にザハロフ方程式からNLSへの極限については，周期境界条件下では非周期的な場合と同様の解の収束が必ずしも起こらず，極限方程式に修正を加える必要があることを見出した．

(5) 微分を含む２次の非線形項を持つNLSのシステムについて，「質量共鳴条件」と「非線形項の零構造」の２つの条件のもとで，尺度変換に関して臨界な正則性の空間における時間局所適切性，および小さな初期値に対する大域適切性と線形解への散乱を示した．［論文(2).］

本研究成果は空間非周期的な場合を扱っているため研究課題との関連は薄いが，「質量共鳴条件」下で生じる寄与の大きな共鳴相互作用を「零構造」に基づいて制御するという証明のアイデアは周期条件の場合にも応用が期待される．また証明で用いたU2, V2型関数空間は現在ではフーリエ制限ノルムの空間の臨界正則性における代替物と認識されており，周期境界値問題に関する研究でも必須の道具となりつつある．本研究を通してこれらの道具により一層習熟することができた．

(6) 自身が組織委員の一人となって研究集会「線形および非線形分散型方程式の研究（RIMS共同研究）」(2013年5月20日～23日)を開催し，若手研究者がインフォーマルな雰囲気の中で活発に議論できる場を提供することにより，当該分野の発展に貢献した．講演者の出張旅費の一部として補助金を活用した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

(1) Nobu Kishimoto, Tsuyoshi Yoneda; A number theoretical observation of a resonant interaction of Rossby waves, Kodai Mathematical Journal（査読有），掲載決定済.

(2) Masahiro Ikeda, Nobu Kishimoto,

Mamoru Okamoto; Well-posedness for a quadratic derivative nonlinear Schrödinger system at the critical regularity, Journal of Functional Analysis（査読有）, 掲載決定済.
(3) Nobu Kishimoto; Unconditional uniqueness of solutions for nonlinear dispersive equations, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics(査読無), Vol. 164 (2015), pp. 78-82. URL: http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2375/
(4) Nobu Kishimoto; Remark on the periodic mass critical nonlinear Schrödinger equation, Proceedings of the American Mathematical Society（査読有）, Vol. 142 (2014), pp. 2649-2660.

〔学会発表〕（計２９件）
(1) Nobu Kishimoto; Nonlinear dispersive equations with periodic boundary conditions, East Asian Core Doctorial Forum on Mathematics 2016, 2016/1/11, Shanghai (China).
(2) Nobu Kishimoto; Unconditional uniqueness for the modified Benjamin-Ono equation, Workshop on Hyperbolic and Dispersive PDEs in Sendai, 2015/12/17, 東北大学（宮城県仙台市）.
(3) 岸本展; Uniqueness problem for some nonlinear Schrödinger equations and application, 第 5 回弘前非線形方程式研究会, 2015/12/12, 弘前大学（青森県弘前市）.
(4) Nobu Kishimoto; Nonlinear dispersive equations with periodic boundary conditions, The 8th International Conference on Science and Mathematics Education in Developing Countries, 2015/12/4, Yangon (Myanmar).
(5) 岸本展; 非線形分散型方程式の解の無条件一意性について, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会・函数方程式論分科会特別講演, 2015/9/16, 京都産業大学（京都府京都市）.
(6) Nobu Kishimoto; Unconditional uniqueness of solutions for nonlinear dispersive equations, 第 40 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2015/8/20, 北海道大学（北海道札幌市）.
(7) Nobu Kishimoto; Unconditional uniqueness for periodic nonlinear dispersive equations, Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equations 2015, 2015/2/21, 東京理科大学（東京都新宿区）.
(8) 岸本展; Unconditional uniqueness for periodic nonlinear dispersive equations, 第 12 回浜松偏微分方程式研究集会, 2014/12/23, 静岡大学（静岡県浜松市）.
(9) Nobu Kishimoto; Unconditional uniqueness for certain periodic nonlinear dispersive equations, Calderón-Zygmund Analysis Seminar, 2014/2/10, Chicago (USA).
(10) 岸本 展; Unconditional well-posedness for the periodic cubic nonlinear Schrödinger equation, 第 2 回岐阜数理科学研究会, 2013/9/18, 飛騨高山まちの博物館（岐阜県高山市）.
(11) Nobu Kishimoto; Well-posedness for a nonlinear Schrödinger equation on 2D torus, CAU-Kyoto University Joint Workshop on Nonlinear PDEs, 2013/2/16, Seoul (Korea).
(12) Nobu Kishimoto; Well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with periodic boundary conditions, Linear and Nonlinear Waves No.10, 2012/10/31, ピアザ淡海（滋賀県大津市）.

６．研究組織
(1)研究代表者
岸本 展 (KISHIMOTO, Nobu)
京都大学・数理解析研究所・講師
研究者番号： 90610072