様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４０１０３

研究課題名（和文）ザルクマンの補題が生成する複素力学系のラミネーション

研究課題名（英文）Laminations in complex dynamics generated by Zalcman's lemma

研究代表者
川平　友規（Kawahira, Tomoki）

東京工業大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：５０３７７９７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：複素力学系理論とは，複素数全体の集合（もしくはそれを拡張した空間）にある種の運動法則を与えた系を考え，その時間発展を解析する理論である．本研究では，系の運動法則が複素パラメーターに依存するとき，系が不安定に変化するようなパラメーターの集合について研究した．この集合は力学系自身のカオス部分とある種の相関性があり，互いに性質を制限し合っている．これらの間の橋渡し役として「ザルクマンの補題」を用いて，おもに2次多項式族について種々の結果を得た．

研究成果の概要（英文）：A complex dynamics is a system where the complex numbers move according to a deterministic law of motion. We mainly considered the cases when the law of motion depends on a complex parameter. The system may be unstable under perturbation at some parameters and the set of such parameters often behaves like a chaotic locus of a given complex dynamics. In this research project, we choose "Zalcman's lemma" as a bridge that connects dynamical systems and the parameter spaces. Most of our results are related to the family of quadratic polynomials.

研究分野：複素力学系

キーワード：複素力学系　ザルクマンの補題　ラミネーション　剛性

１．研究開始当初の背景

f をリーマン球面（複素平面に無限遠点を加えたもの）上の有理関数もしくは有理形関数とするとき，その反復合成によって得られる力学系を（1 次元）複素力学系とよぶ．これを時間発展する動的システムとみなすとき，関数 f はいわば点の「運動法則」である．ではこの「運動法則」を微小変化させた場合に，系全体がどの程度変化するのだろうか？これが本研究課題の核，力学系の「安定性」の問題である．

「安定性」の問題に関連して，力学系の「変形可能性」について考えてみよう．リーマン球面上の力学系が正則写像の族 F（有理関数の反復合成やメビウス変換群など）により与えられたとする．このような力学系は一般に「正則力学系」とよばれる．さてリーマン球面からリーマン球面自身への同相写像 h があるとき，リーマン球面上の正則力学系 F の元 f による作用を「共役をとる」というフィルターを通して観測してみよう．こうして得られる作用 g = h•f•h^{-1} は f の h による位相的変形と考えられる．一般に F の位相的変形 G = h・F・h^{-1} が再び正則力学系になるとはかぎらないが，実際に G が正則力学系となった場合，そのバラエティーには力学系に応じた比較的強い制限が加わる．これが正則力学系の剛性(rigidity) である．

逆に強い剛性をもたない複素力学系は，正則力学系のカテゴリーで非自明な位相的変形を許すということである．これは，「運動法則」を変えても安定な力学系であることを示唆する．じつはこのように安定な力学系なほうが，より「一般的」なのである．1980 年代初頭，マニエらは次数を固定した有理関数の係数空間において，安定な力学系が稠密な開集合をなすことを示した(Mane–Sad–Sullivan, 1983)．その稠密な開集合の内訳が，「双曲的」とよばれるきわめて性質の良いクラスの力学系からなるであろう，というのが「双曲稠密性予想」で，複素力学系理論における最重要問題のひとつである．安定な複素力学系は係数空間内で位相的変形を許すが，「双曲的」な力学系ではカオス部分での変形が実質的にできないことが知られている．より一般に，マニエらは同論文で「個々の力学系をカオス部分に制限した場合，位相的変形は（ごく単純な例外を除いて）等角的変形に限られる」という NILF 性（No Invariant Line Field）が双曲稠密性予想を導くことを示した．以来，「NILF 性＝カオス部分の剛性⇒ 双曲稠密性」という戦略は，われわれ複素力学系研究者にとってひとつのドグマとなっている．

２．研究の目的

(1) 新たな剛性定理に向けて

90 年代，リュービッチとミンスキーはクライン群と 3 次元双曲多様体の関係からのアナロジーとして，複素力学系に付随する 3 次元双曲ラミネーションの理論を構築した(Lyubich-Minsky, 1998)．彼らはモストウ剛性など双曲多様体の剛性定理の証明をまねて，「convex cocompact」とよばれるクラスの有理関数が剛性を（したがって NILF 性も）持つことを示した．一方ハイッシンスキーは，より広い「弱双曲的」とよばれるクラスについて，全く関数論的な方法でリュービッチとミンスキーの剛性定理を拡張した（Haissinsky, 2001)．両者の剛性定理へのアプローチは外見上まったく異なるが，研究代表者（川平）は近年，これらを統一的に解釈する方法を見出した．それが，「ザルクマンの補題」を用いた定式化である．

(2) ザルクマンの補題とリーマン面ラミネーション

正則関数 f による力学系のカオス部分はジュリア集合とよばれ f の反復合成が生成する正則関数族が正規族に「ならない」部分として定義される．正規性（ リーマン球面上では同程度連続性と同値）の判定法としては，強力な十分条件である「モンテルの定理」があり，ファトウとジュリアによる先駆的な複素力学系研究（1910 年代）の土台となった．それから約 60 年後，ザルクマンは正則関数族が正規族に「ならない」，新しい必要十分条件を発見する（Zalcman, 1975)．現在「ザルクマンの補題」とよばれるこの命題は，非正規関数族に適度なリスケーリングを施すと，ある有理形関数への収束列が構成できることを主張する．ザルクマンの補題を用いれば，複素力学系のジュリア集合（カオス部分）そのものを直接定義できるうえ，またその構成的な性格から，複素力学系理論全体を再解釈し，また簡易化する可能性を秘めている．たとえば，研究代表者（川平）はジュリア集合と後述するマンデルブロー集合の幾何学的類似性（タンの定理）をザルクマンの補題を用いて再解釈することで，結果の拡張と証明の大幅な短縮に成功した．また，ザルクマンの補題が生成する有理形関数の族を用いると，リーマン面ラミネーション（「ザルクマンラミネーション」）が構成できることを示した．このラミネーションは非可算無限個の複素平面のコピーが複雑に絡み合ったような位相空間だが，局所的にはリーマン面葉層（フォリエーション）と同じであり，幾何学的直感を許す．リュービッチとミンスキーが 3 次元双曲ラミネーションを構成した際，その土台としたのも同種のラミネーションであり，ザルクマンラミネーションはこれを部分集合として含むか，もしくは一致する．

本研究の中心的な課題は，(0) ザルクマンの補題をもちいて複素力学系理論の再解釈と簡易化を進めること，さらにザルクマンラミネーション（もしくはその亜種）を用いて，(1) その変形理論を構築し，(2) 既存の剛

性定理・NILF 定理をさらに改良することである．

３．研究の方法

複素力学系としては有理関数から生成されるものに焦点を絞った．中でも，単純でありかつ未解決問題の多い２次多項式族の力学系について深く考察した．２次多項式族は本質的に１つの複素数でパラメーター付けされる．とくに力学系の底空間とパラメーター空間の次元は同じであり，力学系のカオス部分とパラメーター集合の「分岐集合」（いわゆるマンデルブロー集合の境界）の間にある種の相関性がある．これらの間で相互に情報を読み替え合うことで，力学系の安定性や不安定性（分岐）についての結果を得る，というのが複素力学系ではよく用いられる手法（あるいは原理）である．

本研究課題では力学系のカオス部分と力学系族の分岐集合の間の橋渡し役となるのが「ザルクマンの補題」である．さらにこの補題から生成される有理型関数の族や，その関数族から構成されるザルクマン・ラミネーション（あるいは解析的関数芽の空間）がもつ複素幾何学的な情報もまた力学系のカオス部分と力学系族の分岐集合を結ぶ重要な対象となる．これらの道具を駆使して，既存の複素力学系理論を再検討し，中でも複素力学系の剛性問題について，複素幾何学的な観点から考察した．

４．研究成果

(1) 力学系のカオス部分（ジュリア集合）は力学系の反復合成が生成する正則関数族が「正規族とならない」点全体であるから，ザルクマンの補題を適用することで有理形関数の族を定義することができる．こちらを便宜的に，「ダイナミカル・ザルクマン関数族」としてよぶことにする．

一方，複素数（一般には複素多様体）をパラメーターにもつ有理写像の族を考えたとき，それらが生成する力学系が分岐するようなパラメーターの集合を「分岐集合」とよぶ．分岐集合は力学系の分岐点の軌道が生成する正則関数族が「正規族でない」パラメーターの全体と一致するため，こちらにもザルクマンの補題を適用することができる．このとき，ザルクマンの補題が生成する有理形関数全体を「パラメトリック・ザルクマン関数族」として定義する．

研究代表者（川平）は以前の研究で，「力学系の分岐集合が局所的に特定の力学系のジュリア集合と形状がほぼ一致する」という「タンの定理」に対し，ザルクマンの補題の原理を用いた新しい証明を与えた．本研究の過程でじつはその根本にあるのが特定の力学系が生成する「ダイナミカル・ザルクマン関数族」と「パラメトリック・ザルクマン関数族」が少なくとも１つの有理形関数を共通部分として持つ，という性質であることを見出し，より一般化した定式化を与えた．この結果については現在論文を執筆中である．

(2) 上述の「タンの定理」は２次多項式族に関する結果であるが，研究代表者（川平）はこれと対応する結果を「反正則２次多項式族」で証明した．アイディアとしては「タンの定理」と同じものを用いるが，反正則２次多項式族は力学系がパラメーターについて実解析的にしか変化しないので，正則関数論を用いた議論をそのまま適用することはできない．そこで，反正則２次多項式族をある種の正則４次多項式のパラメーター空間に埋め込むことで「タンの定理」の議論に必要な条件をクリアさせる，という手法をとった．この結果については現在論文を執筆中である．

(3)Y.-C. Chen（台湾中央研究院）と，Cantor 型とよばれる２次多項式族の安定な族が Misiurewicz 型とよばれる２次多項式に退化する様子を「正則運動の境界挙動」という観点から研究した．具体的には，Cantor 型２次多項式力学系のパラメーターへの依存性を（可算無限個の）微分方程式によって表現し，解（曲線）の速度がパラメーターの発散に応じて一定のオーダーで増大することを証明した．これにより，パラメーターがある曲線に沿って境界に近づいても，それが分岐集合に対して距離を一定の割合で保つならば，解は境界まで広義積分可能であり，力学系も連続的に退化することを示した．この結果についても現在論文を執筆中である．

(4) リーマン予想の複素力学系をもちいた言い換えを新たに提示した．リーマン予想自体はリーマン・ゼータ関数（これは有理型関数）の零点に関するものであるが，これを正則力学系の固定点の正則指数によって特徴づけることで，リーマン予想を「位相的に」表現することができる．すなわち，位相共役をとっても不変な性質によって記述した．この結果は現在論文を投稿中である．

(5) 木坂正史氏との共同研究により，力学系の２次多項式の分岐点集合（いわゆるマンデルブロー集合の境界）に特定のジュリア集合が埋め込まれている現象を説明した．特にその埋め込みの歪曲度がいくらでも小さくできることを証明した．すなわち，マンデルブロー集合の境界にはいくらでも「きれいな」ジュリア集合が埋め込まれていることが分かった．この結果も現在論文を執筆中である．

（６）C. Cabrera（メキシコ，UNAM）を訪問し，ザルクマンラミネーションの複素２次元力学系への埋め込み可能性，変形の実現可能性などについて議論した．今後も継続して議論していくことで合意した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1 件）

① T.Kawahira, Quatre applications du lemme de Zalcman a la dynamique complexe, *J. d'Analyse Math.* 査読有, **124** (2014), pp 309 – 336,
DOI：10.1007/s11854-014-0034-5

〔学会発表〕（計　12 件）

① 川平友規, The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics,2016 年度日本数学会年会・函数論分科会,2016 年 3 月 16 日，筑波大学

② 川平友規, From Cantor to Misiurewicz along parameter ray, 2016 年度日本数学会年会・函数論分科会, 2016 年 3 月 16 日，筑波大学

③ 川平友規, 複素力学系とリーマン予想，固定点の正則指数．冬の力学系研究集会, 2016 年 1 月 9 日，日大軽井沢研修所

④ 川平友規, The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics. RIMS 研究集会「複素力学系の深化」(2015/12/7 - 12/11) 2015 年 12 月 9 日，京都大学

⑤ 川平友規, From Cantor to Misiurewicz along parameter ray. RIMS 研究集会「複素力学系の深化」,2015 年 12 月 8 日，京都大学.

⑥ 川平友規, The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics. The 2nd UU-TT Simposium, Session 6 (Math. Session), 2015 年 11 月 17 日, Envisonmental Energy Innovation Building (EEI)

⑦ 川平友規, From Cantor to Misiurewicz along parameter rays. RIMS 研究集会「力学系とその諸分野への応用」2015 年 7 月 2 日，京都大学.

⑧ 川平友規, The Riemann Hypothesis in complex (and topological) dynamics. RIMS 研究集会「複素力学系の総合的研究」, 2014 年 12 月 12 日，京都大学

⑨ 川平友規, 双曲型 Riemann 面の Teichmuller 空間と複素力学系.「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘 2012 年 12 月 8 日

⑩ 川平友規, On dynamical and parametric Zalcman functions. 2012 年度複素力学系研究集会 -- 複素力学系の新展開 --, 2012 年 12 月 12 日， 京都大学

⑪ 川平友規, Zalcman の補題と複素力学系. 2013 年度日本数学会年会・函数論分科会・特別講演， 2013 年 03 月 22 日，京都大学.

〔図書〕（計　2 件）

① 川平友規，日本評論社，微分積分 ― 1 変数と 2 変数，2015，267 ページ.

② 川平友規，プレアデス出版，レクチャーズオン Mathematica，2013，196 ページ.

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira

プレプリント：Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics, Submitted, 2015.

６．研究組織
(1)研究代表者
川平 友規（KAWAHIRA TOMOKI）
東京工業大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：50377975

(2)研究分担者
なし　（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
なし　（　　　　）

研究者番号：