

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 19 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740105

研究課題名(和文) 体積保存部分的双曲型力学系に付随する不変葉層の絶対連続性とエルゴード性

研究課題名(英文) Absolute continuity of foliations and ergodicity for smooth measure preserving partially hyperbolic dynamics

研究代表者

平山 至大 (HIRAYAMA, Michihiro)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：50452735

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：力学系のエルゴード性問題における幾何学的な手法の研究を行った。特にアノソフ系において有効であったホップ議論を接触する葉層に対しても適用できるように拡張することで、非一様双曲型力学系のエルゴード性を導く幾何構造を構成した。応用として、曲面上の非一様双曲型力学系については位相推移性からエルゴード性が導かれることの別証明を与えた。また部分的双曲型力学系のなす空間におけるある空でない開集合において、エルゴード性が稠密であることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied geometric criteria for the ergodicity problem in smooth dynamical systems. It is known that the so-called Hopf argument is a simple but strong method in the ergodic theory of Anosov systems. We extended the Hopf argument for Anosov systems to a broad class of dynamical systems, the non-uniformly hyperbolic systems, and constructed a geometric structure which yields the ergodicity. One of the differences between these dynamics is that while the foliations of Anosov systems do have transverse intersections, while the foliations of the non-uniformly hyperbolic systems may have tangential points. As an application, we got another proof of the ergodicity of transitive non-uniformly hyperbolic surface diffeomorphisms. Further, we constructed a non-empty open set in the space of partially hyperbolic systems of which the ergodicity is a dense phenomenon.

研究分野：力学系理論, エルゴード理論

キーワード：エルゴード性

1. 研究開始当初の背景

多様体上の微分同相写像の反復合成が生成する力学系の定性的および定量的解明が力学系研究の大目標の一つである。この目標は、アノソフ系あるいは一様双曲型と呼ばれるカオスの力学系に対しては、現在までに様々な観点から深く達成されている。

一方で、例えばアノソフ系の群拡大や非正曲率多様体上の測地流など、双曲性が一部で失われているために一様双曲型力学系理論の範疇にない力学系も豊富に存在する。これらの力学系は双曲性の失われ方に応じて、それぞれ部分的双曲型あるいは非一様双曲型と呼ばれ、近年活発な研究がなされている。その中心的課題の一つに、力学系が相空間の自然な測度に関してエルゴード的であるための条件を明らかにする、エルゴード性の問題がある。エルゴード性は確率論的な性質であり、それを確認することは力学系の研究において基本的な問題であるが、一般に困難である。

可微分力学系がアノソフ的である場合、強拡大的葉層及び強縮小的葉層とよばれる位相的不変葉層が付随し、これは絶対連続性とよばれる性質をもつ。アノソフ系においては、絶対連続性とホップ議論とよばれる幾何学的な議論を組み合わせることでエルゴード性が明らかにされてきた。しかしこの手法（特にホップ議論）は、部分的双曲系あるいは非一様双曲系に対しては適用範囲がかなり制限されてしまい、その改良が必要であると考えられていた。

部分的双曲系については1990年代頃から系統的な研究がなされてきたが、非一様双曲系については大きな進展はなかった。

2. 研究の目的

部分的双曲系あるいは非一様双曲系に適用可能なホップ型議論を開発し、それをエルゴード性の問題に応用すること。

3. 研究の方法

部分的双曲系も、アノソフ系と同様、強拡大的葉層及び強縮小的葉層と呼ばれる位相的不変葉層をもつ。また非一様双曲系は、拡大的葉層及び縮小的葉層と呼ばれる可測な不変葉層をもつ。これらはすべて絶対連続性をもつ。しかし、アノソフ系の葉層対が各点で横断的に交差するのに対し、これらの葉層は横断性が欠如している。特に非一様双曲系の葉層対は、ほとんどすべての点における横断性しか保証されず、それ以外の点では接触することもある。また部分的双曲系の葉層対は、接触こそしないが、アノソフ系と比較して弱

い意味での横断性しかもたない。こうした意味での横断性の欠如が、アノソフ系の場合に有効であったホップ議論の適用を制限している。

そこで、非一様双曲系で有効なホップ型議論を構築するために、葉層対の接触を調べることにした。実際には、葉層対の交点全体のなす集合は扱いにくいので、適切に局所化することにした。

局所化の手続きは、葉層から誘導されるホロノミー写像とよばれる局所写像を用いることで行った。このアイデア自体はアノソフ系でも用いられたものであり、新しいものではない。しかし、アノソフ系のホロノミー写像は局所同相写像となるのに対し、接触する葉層対をもつ非一様双曲系の場合には射影でしかない、という点ですでに状況は異なる。

局所化した後、ホロノミー射影による接触点集合の像集合の定量的評価を行った。この議論から得られる結論は、写像の臨界値に関するサード定理に類似している。ただし、力学系のホロノミー射影は一般に可微分でないため、サード定理がそのまま適用できるという意味ではない。

4. 研究成果

本研究の主たる成果は、非一様双曲系で有効なホップ型議論を構築し、それをいくつかの具体的な力学系のエルゴード性問題に応用したことである。ただし、これまでのところ、新しいホップ型議論はすべての非一様双曲系に適用可能ではない。以下、この点についても触れながら研究成果を述べる。

コンパクト可微分多様体上の可微分同相写像は体積測度を保つとする。ここで体積測度は双曲的、すなわち体積測度に関してほとんどすべての点でゼロのリアプノフ指数をもたないとする。このとき力学系を非一様双曲系とよぶ。(アノソフ系は非一様双曲系である。アノソフ系を許容しない多様体が存在するのに対し、非一様双曲系は2次元以上の多様体に必ず存在することが知られている(2002 Dolgopyat-Pesin).)

非一様双曲系は、体積測度に関してほとんどすべての点において、拡大的葉層及び縮小的葉層とよばれる可測な不変葉層をもつ。これらの葉層対のなす直積空間において、ほとんどすべての大域的葉対が少なくとも一つの横断的交差をもつとき、横断的概到達可能であるとよぶことにする。また、ほとんどすべての大域的葉対が少なくとも交差するとき、概到達可能であるとよぶことにする。ここで後者において、交差の横断性は仮定しない。つまりこの場合、葉層対の交差は接触のみであってもよい。

アノソフ系の場合、交差は必ず横断的であるから、概到達可能性をもつ（そして横断的概到達可能性はもたない）力学系は本質的な非一様双曲系であると言える。これに対して、横断的概到達可能性をもつ力学系はアノソフ系とは限らないが、非本質的な非一様双曲系と言える。ただし、横断的概到達可能性は横断的交差の存在を保証するものであって、接触の存在を排除するものではない。なお（横断的）概到達可能性の概念は本研究で導入されたものである。

さて、横断的概到達可能性をもつ非一様双曲系のホップ型議論は本研究以前に確立されており、また概到達可能性をもつ場合も、拡大的葉層の次元が一定である場合にはホロノミー射影に関する議論の方針はほぼ固まっていた。

本研究ではまずこの議論を整備し、拡大的葉層の次元が一定である場合には概到達可能性をもつ非一様双曲系が体積測度に関してエルゴード的であることを示した。研究の方法欄でも述べたように、議論の中核をなすのはホロノミー射影に関するサード型定理である。（接触点をホロノミー射影の臨界点とみなすことで、サード定理だと思えることができる。ただしそこでも述べたように、ホロノミー射影は一般に可微分でないため、サード定理の結論あるいは証明がそのまま適用できるというわけではない。）

また、ホロノミー射影に対する定量的評価から、概到達可能性をもつ葉層対において接触点集合は測度論的観点からは無視できるほどしかないことを明らかにした。これ自体は葉層構造論的観点からも興味ある結果であると考えている。

次に、拡大的葉層の次元に関する仮定を外すべく研究を進めた。しかしながら、これまでのところ期待する結果にまで至っていない。ただし、多様体（相空間）の次元が高々4である場合には、概到達可能性をもつ非一様双曲系が体積測度に関してエルゴード的であることを示した。

一般次元の場合については、今後引き続き研究を遂行する予定である。

以上の結果は、一般に（横断的）概到達可能性という幾何構造がエルゴード性を導くことを主張するものであり、この意味でいくぶん抽象的な結果である。以下では、この結果を応用することで得られたより具体的な主張を述べる。

力学系の位相的複雑さとエルゴード理論的（確率論的）複雑さの相関関係は興味深い問題である。ただし、一般にはエルゴード理論的複雑さの方が強い。例えば、エルゴード的ならば測度台上に制限した力学系は位相推移的である。（ここに位相推移性とは、稠密

な軌道が存在することを意味する。）しかしながら、位相推移的であってもエルゴード的でないような可微分同相写像が存在し、さらに、極小的とよばれる、位相推移性より強い性質をもつ非エルゴード的可微分同相写像さえ存在することが知られている (1961 Furstenberg)。

これに対し、多様体が2次元（つまり曲面）の場合、位相推移的な非一様双曲系は体積測度（面積）に関してエルゴード的であることを示した。この結果自体はすでに知られていた (2011 F. Rodriguez Hertz-J. Rodriguez Hertz-Tahzibi-Ures)。ただし、彼らの議論が一部に解析的な手法を用いるのに対し、ここでの議論は本研究で導入した（横断的）概到達可能性という幾何構造を用いるものである。

もう一つの応用を述べる。力学系理論においては、個別の力学系についての研究も重要であるが、ある性質をみたす力学系の“豊富さ”もしばしば重要な研究対象となる。より詳しく言えば、力学系全体のなす空間における開性（安定性）、稠密性などである。

これに対し、体積測度を保つ部分的双曲系の空間における、ある空でない開集合において横断的概到達可能性は稠密であることを示した。さらに、この開集合に属する力学系は拡大的葉層の次元が一定であるため、エルゴード性が稠密であることも従う。

この結果が示すように、もとは非一様双曲系に対して導入した（横断的）概到達可能性であったが、適当な状況下では部分的双曲系についても確認できる構造である。ただし、この点についてもより広範な部分的双曲系への応用を見据えて、今後引き続き研究を遂行する予定である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

- (1) Michihiro Hirayama and Naoya Sumi, On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures: the constant unstable dimension case, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 掲載決定, 査読有
DOI: 10.1017/etds.2014.124
- (2) Michihiro Hirayama and Naoya Sumi, Hyperbolic measures with transverse intersections of stable and unstable manifolds, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33, 1451-1476, 2013. 査読有
DOI: 10.3934/dcds.2013.33.1451

[学会発表] (計 4 件)

- (1) 平山至大,
Topological transitivity and
ergodicity for area preserving
diffeomorphisms,
ジェネラルトポロジーシンポジウム,
2014 年 12 月 17 日, 静岡大学 (静岡県
静岡市)
- (2) Michihiro Hirayama,
On the ergodicity of hyperbolic SRB
measures,
Dynamical Systems: 100 years after
Poincaré,
2012 年 9 月 4 日, Gijón (スペイン)
- (3) 平山至大,
可微分力学系のエルゴード性,
日本数学会九州支部例会,
2012 年 2 月 11 日, 九州工業大学 (福岡
県北九州市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平山 至大 (HIRAYAMA, Michihiro)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号 : 50452735