平成２５年度（基盤研究（S））研究概要（採択時）

【基盤研究（Ｓ）】

理工系（数物系科学）

研究課題名　代数多様体のモジュライ空間と自己射の数理

京都大学・数理解析研究所・教授　向井　茂（むかい　しげる）

研　究　分　野：　数学

キ　ー　ワ　ー　ド：　代数幾何学、複素幾何、表現論、複素解析、数論幾何学

【研究の背景・目的】

代数幾何学は多くの固有の方法や問題をもっているが、他の分野への応用にも目覚ましいものがあって、それは現在も続いている。応用のされ方としては、モジュライに関するものが多いが、近年は自己射（写像）に関連するものも増えてきている。特に、複素力学系における隣接分野では、自己同型のエントロピーやクレモナ群等の研究において代数幾何学へのフィードバックを与える結果が得られている。

本研究は、代数多様体とモジュライという伝統的な問題群に対して、自己射の観点を取り入れることによって、また、複素力学系や幾何学的表現論等における隣接分野との問題意識や研究手法の共有をはかることによって、研究のさらなる発展を目指すものである。

【研究の方法】

次のテーマを中心に研究チームを組んで協力し合い、大きな成果と相乗効果を目指す。

①　代数多様体のモジュライとコンパクト化をエンリケス曲面やカラビ・ヤオ多様体を中心に研究する。

向井は、Nikulin が定義したルート系の概念を精密化していて、それをエンリケス曲面の諸問題に適用している。この研究の周辺には面白い無限離散群をもつエンリケス曲面や有理曲面の候補、さらに、それらの高次元類似が沢山でてきているので、複素力学系的に面白そうな無限位数自己同型をその中から探し出したい。

また、Borcherds 保型形式値の具体的計算（吉川・川口と共同研究中）を拡張していくことによってエンリケス曲面の周期写像をより深く理解したい。

②　代数多様体の自己射の力学系・エルゴード理論的な性質、特に、不変集合の構造や不変測度の性質などを研究する。

空間の自己射は、それを時間発展と見なして力学系と考えられるが、カオス的な現象の起きることが知られている。カオス的な挙動を示す系については、数学的な取り扱いが困難な場合が多い。利用できる手法は限られていたが、代数多様体の射の場合には、代数的手法、複素解析的手法、ポテンシャル論的手法などにより、様々な性質が明らかにされつつある。代数多様体の自己射の力学系に関して、このような観点から研究していく。

③　Fomin-Zelevinsky によって導入されたクラスター代数、およびその量子化は、近年、多くの分野との関連が見出されて、活発な研究が行われている。中島は、Hernandez-Leclerc の研究に示唆されて、あるクラスのクラスター代数を次数付き箙多様体の上の偏屈層から作られる合成積代数の表現の圏の、グロタンディエク環として実現することに成功した。一方で、Kontsevich-Soibelman や長尾の研究により、3 次元カラビ・ヤウ圏における一般化された Donaldson-Thomas 型不変量の壁越え公式とクラスター代数の間に密接な関係があることが分かっている。両者はともにモジュライ空間に関係するという意味では粗い意味で類似しているものの、精密な関係ははっきりしない。この点を解消して、クラスター代数の幾何学的な理解を深める。

【期待される成果と意義】

明示的な定義式をもっていて自己同型群も具体的な無限群になるエンリケス曲面は今まで知られていなかった。それが沢山構成できそうである。また、ある種のエンリケス曲面の全体のモジュライ空間は非自明な自己写像を持っている可能性がある。Borcherds の保型形式への理解の深まりも相俟って、エンリケス曲面は楕円曲線論の類似を展開するに相応しい領域になりつつある。古典的成果のエンリケス曲面への一般化が期待できる。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

・ Shigeru Mukai: Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, J. Math. Soc. Japan 64(2012), 231-246.

・Hiraku Nakajima: Quiver varieties and cluster algebras, Kyoto J. Math. 51(2011), 71-116.

【研究期間と研究経費】

平成 25 年度－29 年度

42,800 千円

【ホームページ等】

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/index-j.html