2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　３０　年　　６　月　２０　日現在

機関番号：　１３９０１

研究種目：　基盤研究(B)（一般）

研究期間：　2013～2017

課題番号：　２５２８７００２

研究課題名（和文）多重ゼータ関数、多重保型L関数の代数的および解析的挙動の研究

研究課題名（英文）A study on algebraic and analytic behavior of multiple zeta-functions and multiple automorphic L-functions

研究代表者

松本　耕二（Matsumoto, Kohji）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：６０１９２７５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　13,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究で扱った多重級数は、オイラーザギエ型の多重ゼータ関数と、それを含む大きなクラスであるルート系のゼータ関数、またそれらに保型形式のフーリエ係数を乗せたもの、などである。ルート系のゼータ関数や、さらに一般にリー群に付随する多重ゼータ関数の構造論と関数関係式、双曲線関数を含む多重級数の値の計算、多重ゼータ関数の零点分布の数値計算、保型形式のフーリエ係数を乗せた二重ゼータ関数の二種類の関数等式の証明、また特異点解消型多重ゼータ関数という概念の導入と、関連して p 進多重ゼータ関数の理論の展開などが研究期間中に彫られた主要な成果である。

研究成果の概要（英文）：The present research has dealt with various multiple series, such as multiple zeta-functions of Euler-Zagier type, a more general class of zeta-functions of root systems, and also the same type of series with Fourier coefficients of modular forms on the numerators.　　The main results obtained in the period of the present research are the structure theory and functional relations for zeta-functions of root systems, or more general multiple zeta-functions associated with Lie groups; evaluation of values of multiple series involving hyperbolic functions; numerical computations on the zeros multiple zeta-functions; the proof of two types of functional equations for double zeta-functions involving Fourier coefficients of modular forms on the numerator; the idea of desingularized multiple zeta-functions and the development of the theory of p-adic multiple zeta-functions.

研究分野：　整数論

キーワード：　多重ゼータ関数　ルート系のゼータ関数　関数等式　関数関係式　p進多重ゼータ関数　多重保型 L 関数　特異点解消多重ゼータ関数

１．　研究開始当初の背景

多重ゼータ関数の解析的な理論は、2000 頃にようやく本格的な研究が開始された、新しい分野である。代数的な研究方向は、Zagier 予想の解明などを目的として国内外で盛んに研究が進められて来たが、それに比べても解析的な側面からの研究はなお未開拓な状況にある。これまでに、解析接続などの最低限の基礎は確立されたが、なお十分に研究されているとは到底言い難い。少なくともまず、理論整備のための基礎工事を進めねばならない状態だった、と言える。しかしながら一方で、最近になって Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数や、さらにはルート系のゼータ関数など、新しい重要な多重ゼータ関数のクラスも次々と見出され、解析的研究の重要性が増して来ており、基礎理論の整備は喫緊の課題になっていた。

２．　研究の目的

前項で述べたような理論的基礎工事を推進することがまず重要である。特異点の位置や零点の分布状態、特異点を解消して正規化した関数の振る舞い、関数等式の有無などが当面の課題といえる。同時に、多重ゼータ関数の挙動について詳細な解析を行い、研究の新しい方向性を探りたい。またとくにルート系のゼータ関数という、より一般的な視点に立つことによって、Weyl 群の作用や Poincare 多項式との相互関係など、表現論的な手法が使えて考察を掘り進めることができると考えられる。そもそもルート系のゼータ関数は、物理学者 Witten が導入した Witten のゼータ関数を多変数化したものとして当初導入されたものであり、その体積公式が物理学におけるゲージ理論のある種のモジュライ空間の体積を記述するなど、物理学との繋がりも考えられる。Euler-Zagier 型のゼータ関数は、ルート系のゼータ関数の A 型ないしは C 型の場合の特殊化として得られるので、こうした表現論や物理まで視野に入れた高い立場から、Eyler-Zagier 型の多重ゼータ関数についても新しい光を当てることもできるであろう。こうした可能性も意識しながら、多重ゼータ関数の解析的性質を究明したい。

３．　研究の方法

本研究には解析的整数論、保型関数論、ルート系の理論、表現論、など諸分野の専門家が集結しており、種々の観点を融合させることによって、多重ゼータ関数、ルート系のゼータ関数の統一的な基礎理論を構築する。もう少し具体的に述べれば、零点分布や平均値の計算には解析的整数論の標準的な手法が有効である。また Gangl-Kaneko-Zagier によって切り開かれた、多重ゼータ値と保型形式の結びつきも魅力的なテーマであるが、この方向では当然、保型形式の専門家の寄与が期待される。ルート系のゼータ関数の研究では当然のことながらルート系の専門家が主軸の役割を果たすことになる。この方向はアフィンルート系の理論などを介して数理物理などの広い分野とも繋がる可能性があり、場合によっては適宜、そうした周辺分野の専門家にも助言を求めながら研究を進める必要があるだろう。多重ゼータ関数の解析的挙動がまだまだ多くの謎に包まれた状態であることを考えれば、種々の具体的な場合の個別計算や、必要なら数値実験も行なって、試行錯誤的に多重ゼータ関数の解析的挙動を種々の方向から観察し、その特徴的性質を見極め、新しい方向性を探ることも大切である。こうした、さらに今後の研究へと結びつく実験的考察も、可能な限り進めたい。

４．　研究成果

ルート系のゼータ関数は、この研究の主要な研究対象の一つであるが、まだ導入されて日が浅いので、基礎的なところから理論を整備していかねばならない。

本研究で得られた主要な成果として、まず第一に挙げたいのは、ルート系のゼータ関数が満たす種々の関係式と、その背後にある構造論の樹立である。奇数点での特殊値を含む関係式を示すには、奇数点には符号が付随しているため、関係式が自明なものとなってしまわないかどうかを検証する必要がある。この判定条件を、ある種の変数の個数を下げる操作による方法と、Poincare 多項式の言葉に置き換える方法、ふた通りの手法で与えることができた。そして、いくつかの具体的な Lie 代数に付随するゼータ関数に対して、関数関係式を明示的に描き下した。これらの研究は、ルート系のゼータ関数が表現論的な性質をどのように秘めているか、という疑問に対して、一定の解答を与えた、という意味でも価値があると考える。

また、ルート系のゼータ関数をさらに一般化して、コンパクト連結 Lie 群に付随するゼータ関数を考えると、これはルート系のゼータ関数を定義する和にある種の合同条件を添加したものとなる。この種のゼータ関数についても基礎理論を展開し、いくつかの関数関係式を証明した。そもそも Witten は彼のゼータ関数を、Lie 代数ではなく Lie 群に対して定義しており、その意味ではこの研究は本来の Witten の（物理的な問題意識を持った）考察に近づいた、とも言える。

ルート系のゼータ関数の特殊化として Euler-Zagier 型多重ゼータ関数を捉える、という着想は実り多いものである。その見方

には、A 型のルート系のゼータ関数の特殊化と考える方法と、C 型のルート系のゼータ関数の特殊化とみなす方法のふた通りがある。前者の視点では、従来 Drinfeld 型の反復積分を利用してしか証明できなかった多重ゼータ値のシャッフル関係式を、(ルート系のゼータ関数にまでプロセスを広げることにより)部分分数分解だけで証明することが可能であることを発見した。そして、シャッフル関係式を特殊な場合として包含するような、多重ゼータ関数の関数関係式を導出した。これは Drinfeld 積分の立場にとどまっていては全く不可能な成果である。

他方、C 型の特殊化と見る立場も、この場合には長いルートと短いルートの集合のそれぞれが Weyl 群の軌道になっている、という表現論的な事実により、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数への Weyl 群の作用、という観点をもたらし、種々の新事実を導くことができた。さらに、この立場に立つと B 型のルート系のゼータ関数を特殊化して得られる多重ゼータ関数は、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の「双対」とみなすことができる。この「双対」ゼータ関数についてもいくつかの基本的な結果を証明した。その結果はさらに、多重ゼータ値とレベル 2 の保型形式との関係を論じた研究に応用された。

双曲線関数を分母に含むような無限級数は、楕円関数論などとも関係して、Cauchy, Kronecker や Hurwitz の昔から研究されて来た重要なテーマである。本研究ではこの種の級数を、Eisenstein 級数の双曲型類似と捉え、Barnes の多重ゼータ関数との関連を提示し、種々の明示公式を得た。応用として、q ゼータ関数のある種の特殊値が計算できることもわかった。この方向の研究の中で、今まで(二重ゼータ関数の場合の Hardy-Littlewood の古典的な結果以外)知られていなかった、Barnes の多重ゼータ関数のある種の関数等式を証明することもできた。ほぼ同時に渋川氏もほぼ同じ結果を得たが、我々の手法と渋川氏の手法は全く異なっている。

多重ゼータ関数はそれでもなお、その解析的挙動は容易にはわからない。特にその零点分布は全くの謎に包まれている、と言って良い。零点分布の研究の出発点として、本研究では数値実験も行い、零点集合の描画を行いながらその挙動を考察した。まず最初に、一変数にした場合の数値実験を試みて、その場合には、Hurwitz ゼータ関数の零点分布と類似した分布状況を示すことを確認した。若干の理論的考察も行なったが、全体的な理論的解明はまだまだである。続いて多変数の場合であるが、この場合には状況が複素多次元になるので平面には描画できないし、そもそも零点集合が孤立点ではないのでその扱いは一段と困難になるが、相当量の数値実験を行い、零点集合の漸近挙動についていくつかの予想を立て、そのうちのあるものについては証明することにも成功した。

多重ゼータ関数のもうひとつの難しさは、負の整数点が特異点集合上にあり、多くの場合に不確定特異点になってしまうことである。したがってその値は近づき方に依存する極限値としてしか定義できないが、それでも種々の手法によって計算されてきた。本研究においては Mellin-Barnes 積分による積分表示を用いて、任意の整数点の周りでの多重ゼータ関数の Laurent 展開を具体的に計算するアルゴリズムを与えた。(ある場合にはその中にある種の積分が残ってしまうのが、なお不完全な点ではあるが。)

いっぽう、何らかの方法で多重ゼータ関数を「正規化」して特異性を排除してしまう、という試みも考えられる。Manchon-Paycha, Guo-Zhang らによって、代数的な着想による「繰り込み」の手法が提案されていたが、本研究ではそれとは全く異なる複素解析的なアイデアで特異点解消型多重ゼータ関数を定義し、その基本性質を証明した。特に特異点解消型の多重ゼータ関数が本来の多重ゼータ関数の有限個の線形結合でかけるという結果は、その結合によって特異点の驚くべき打ち消し合いが起こっていることを意味し、著しい結果であると考えられる。しかし特異点解消型多重ゼータ関数の意義の本格的解明は今後の研究によることになるであろう。

しかし少なくとも、その着想を元に p 進多重ゼータ関数を導入し、Kummer 型の合同式などの基本性質を示した。これは本質的には以前に導入していた二重の場合の拡張になっており、従ってある意味では古典的な Kubota-Leopoldt の p 進ゼータ関数の系列に連なる者であるが、一方ではそれが以前古庄によって導入されていた p 進多重ポリログと密接に関係していることを見いだすことができた。これは全く出自の異なる二つの p 進的対象を結びつけた成果である。

多重ゼータ関数の分子に数論的な意味のある係数を載せた形の多重級数も重要な研究対象である。こうして考えた級数も分子の係数の影響で特異性がなくなる場合があるので、「正規化」の一種と言えなくもない。特に二重級数の場合に、いくつかの注目すべき進展を得た。まず、数論的な係数が一個だけ載っている場合には、二種類の関数等式が成り立つことを発見した。そのうちの一つはかなり一般的な枠組みで成り立つ性質のものであり、他方もう一つは係数が保型形式の Fourier 係数の場合に、モジュラー関係式の帰結として成立が示されるものである。その証明には Mellin 変換を介するなどの解析的な工夫が必要であった。また係数が von Mangoldt 関数の場合、一個だけだと全平面への解析接続が可能だが、二個載っていると自然境界が現れると思われる。この場合は Goldbach 予想とも関連するので興味深く、Goldbach 予想の合同式条件付き類似に対す

る評価式と、Dirichlet のＬ関数の零点との相互関係を樹立した。これは多重ゼータ関数の理論の古典的な整数論への寄与である。副産物としての Landau-Gonek 公式の法について一様な一般化も得られた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　13　件）

[1] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of multiple zeta-functions of generalized Hurwitz-Lerch type and evaluation of p-adic multiple L-functions at arbitrary integers, RIMS Kokyuroku Bessatsu B68 (2017), 27-66 (査読あり)

[2] Y. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler-Hurwitz-Barnes type with coefficients, ibid. 91-109 (査読あり)

[3] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Fundamentals of p-adic multiple L-functions and evaluation of their special values, Selecta Math. 23 (2017), 39-100 （査読あり）

[4] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of complex multiple zeta-functions, Amer. J. Math. 139 (2017), 147-173 （査読あり）

[5] Y. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler type with coefficients, Adv. Math. 292 (2016), 529-557 （査読あり）

[6] M. Kaneko and M. Sakata, On multiple zeta values of extremal weight, Bull. Austral. Math. Soc. 93 (2016), 186-193 （査読あり）

[7] K. Matsumoto and H. Tsumura, Mean value theorems for the double zeta-function, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 383-406 （査読あり）

[8] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Infinite series involving hyperbolic functions, Lith. Math. J. 55 (2015), 102-118 (査読あり)

[9] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems, Funct. Approx. Comment. Math. 51 (2014), 43-76 （査読あり）

[10] K. Matsumoto and M. Shoji, Numerical computations on the zeros of Euler double zeta-function I, Moscow J. Combin. Number Theory 4 (2014), 295-313 （査読あり）

[11] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, J. Ramanujan Math. Soc. 28 (2013), 49-69 （査読あり）

[12] H. Tsumura, Certain convolution formulas for multiple series, Ramanujan J. 32 (2013), 353-369 （査読あり）

[13] M. Kaneko and K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, Math. Ann. 367 (2013), 1091-1118 （査読あり）

〔学会発表〕（計　8　件）

K. Matsumoto, The zeta-function of the root system of type G_2, Combinatorics, multiple Dirichlet series and analytic number theory, ICERM Wirkshop, Brown Univ., Providence, USA, April 18, 2013.

K. Matsumoto, A numerical study on the behavior of the Euler double zeta-function, Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory, Palanga, Lithuania, Sept 2, 2013

K. Matsumoto, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, Number Theory Seminar, Univ. Lille 1, Lille, France, Dec 10, 2013

K. Matsumoto, Zeta-functions of root systems and Poincare polynomials, Prehomogeneous vector spaces and related topics, JSPS-CNRS Joint Seminar, 立教大学、Sept 3, 2014

K. Matsumoto, Mean value theorems on multiple zeta-functions, Arithmetik an der A7, Univ. Ulm, Germany, July 2, 2015

K. Matsumoto, Desingularization of multiple zeta-functions, Taipei Number Theory Seminar, National Taiwan Univ., Taiwan, March 5, 2016

K. Matsumoto, Goldbach representations in arithmetic progressions and zeros of Dirichlet L-functions, International Conference in Number Theory and Applications, Kasetsart Univ., Bangkok, Thailand, July 17, 2017

K. Matsumoto, Explicit formulas for the values of multiple zeta-functions at negative integer points, Oberseminar Zahlentheorie, Univ. Wuerzburg, Germany, Nov 22, 2017

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
松本耕二　（MATSUMOTO KOHJI）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60192754

(2)研究分担者
小森靖（KOMORI YASUSHI）
立教大学・理学部・教授
研究者番号： 80343200

(3)連携研究者
津村博文（TSUMURA HIROFUMI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：20310419

(3)連携研究者
金子昌信（KANEKO MASANOBU）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：70202017

(3)連携研究者
大野泰生（OHNO YASUO）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70330230

(3)連携研究者
東海林まゆみ（SHOJI MAYUMI）
日本女子大学・理学部・教授
研究者番号：10216161

(3)連携研究者
古庄英和（FURUSHO HIDEKAZU）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：60377976

(3)連携研究者
山崎義徳（YAMASAKI YOSHINORI）
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：00533035

(3)連携研究者
梅垣由美子（UMEGAKI YUMIKO）
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号：80372689

(4)連携研究者
中村隆（NAKAMURA TAKASHI）
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号：50532355