

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287004

研究課題名(和文) W代数の表現論の新展開

研究課題名(英文) New developments of representation theory of W-algebras

研究代表者

荒川 知幸 (Arakawa, Tomoyuki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：40377974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,000,000円

研究成果の概要(和文)：さまざまな応用を視野に置いたW代数の表現論を展開し、多くの結果を得た。中でも、Anne Moreauと共に行ったDeligneの例外系列に付随する極少W代数の研究はRastelli等物理学者により注目され、研究代表者が導入した頂点代数の随伴多様体が四次元のN=2超共型場理論のヒッグス枝を記述するという、頂点代数と弦理論、及びシンプレクティック幾何との予想外の関係が明らかになった。これを受け、川節和哉氏と行った研究の結果は、四次元のN=2超共型場理論のシューア指数の保型性を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We have obtained a numerous results on W-algebras. In particular, the work with Anne Moreau on the W-algebras associated with the Define exceptional series has revealed an expected relationship between the Higgs branches of the four dimensional N=2 supernormal field theories and a certain geometric invariant of vertex algebras called the associated varieties. Based on the relationship, with Kazuyuya Kawasetsu we showed the modularity of the Schur indices of our dimensional N=2 supernormal field theories in physics.

研究分野：表現論

キーワード：頂点作用素代数 W代数 アフィンリー環 随伴多様体 ヒッグス枝 シューア指数

1. 研究開始当初の背景

Borcherds によって導入された頂点代数は理論物理学の弦理論の研究に起源を持つが、これまでの多くの研究により有限群論, モジュラー関数, 代数幾何学, トポロジー, 可積分系, 組合せ論などさまざまな分野に応用を持つことが明らかになってきた。

このような頂点代数の中で最も興味深いもののうちの1つが W 代数である。W 代数は Virasoro 代数や「ほぼ全ての」スーパーコンフォーマル代数を特殊な場合として含む極めて大きな頂点代数の族であり、中零軌道の理論や非可換幾何学, 幾何学的 Langlands 対応, 4次元のゲージ理論とも密接に関係する。

しかし、一方、W 代数の構造は極めて複雑であり、かつてその解析は困難であった。しかし、今世紀に入って応募者等の研究により W 代数の表現論は急速に進展中であった。

2. 研究の目的

本研究課題では近年急速に進展しつつある W 代数の研究の流れを加速させ、

アフィン Lie 環の表現論, モンスター群などの散在型有限群, 正標数における Lie 環の表現論, 共形場理論(曲線のモジュライ理論), 結び目や3次元多様体の不変量, 写像類群の表現, 4次元のゲージ理論における AGT 予想, 幾何学的 Langlands 対応などへのさまざまな応用を視野に置いた W 代数の表現論を展開する。

3. 研究の方法

本研究は、頂点(作用素)代数, アフィン Lie 環の表現論, 保型形式論, 群論, 特異点論, 幾何学的表現論, 偏微分方程式, 素粒子論と広範囲な分野にまたがっているため、研究遂行には各分野の研究者との交流が必要不可欠である。そのため、国内外の専門家の招聘, 国際研究集会の開催, 共同研究者との綿密な議論及び研究打合せ, 研究会等で情報集収を行う。

4. 研究成果

さまざまな応用を視野に置いた W 代数の表現論を展開し、多くの結果を得た。これらの結果は、T. Creutzig, A. Linshaw, A. Molev, A. Moreau, F. Futorny, L. Ramirez, A. Premet, W. Wang 等との共著の論文として既に出版済み、または掲載が決定しており、その他のものもインターネット上で公開されている。中でも Anne Moreau と行った Deligne の例外系列に付随する W 代数の表現に関する研究は Rastelli 等物理学者により注目され、研究代表者が導入した頂点代数の随伴多様体が4次元の N=2 超共型場理論のヒッグス枝を記述するという、頂点代数と弦理論、及びシンプレクティック幾何との予想外の関係が明らかになった。これを受け、川節和哉

氏と行った研究(Kostant Memorial Volume から出版予定)の結果は、4次元の N=2 超共型場理論のシューア指数の保型性を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

Tomoyuki Arakawa, Rationality of Bershadsky-Polyakov vertex algebras, Comm. Math. Phys., October 2013, Volume 323, Issue 2, pp 627-633.

Tomoyuki Arakawa, Two-sided BGG resolutions of admissible representations, Represent. Theory 18 (2014), 183-222.

Tomoyuki Arakawa, C.-H. Lam and H. Yamada, "Zhu's algebra, C2-algebra and C2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras", Adv. Math., vol.264 (2014), 261-295.

T. Arakawa, T. Kuwabara and F. Malikov, "Localization of affine W-algebras", Comm. Math. Phys., April 2015, Volume 335, Issue 1, pp 143-182.

Tomoyuki Arakawa, "Rationality of W-algebras: principal nilpotent cases", Ann. Math. 182 (2015), 565-604.

Tomoyuki Arakawa, "Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C2-cofiniteness of W-algebras", Int. Math. Res. Not. (2015) Vol. 2015, 11605-11666.

T. Arakawa, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras associated with Z/kZ -codes, In: Dobrev V. (eds) Lie Theory and Its Applications in Physics. LT 2015. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 191. Springer, Singapore/

Tomoyuki Arakawa, "Rationality of admissible affine vertex algebras in the

category 0", Duke Math. J, Vol. 165, Number 1 (2016), 67-93.

Tomoyuki Arakawa, W. Wang, "Modular affine vertex algebras and baby Wakimoto modules", In: Proceedings for Southeastern Lie workshop, Proc. Symp. Pure Math., Vol.: 92 (2016), 1-16.

T. Arakawa and A. Molev, Explicit generators in rectangular affine W-algebras of type A, Lett. Math. Phys. 107(1), 47-59, 2017.

T. Arakawa, T. Creutzig and A. Linshaw), Cosets of Bershadsky-Polyakov algebras and rational W-algebras of type A, Sel. Math. New Ser, October 2017, Volume 23, Issue 4, pp 2369-2395.

T. Arakawa and A. Moreau, Sheets and associated varieties of affine vertex algebras, Adv. Math, Volume 320, 7 November 2017, Pages 157-209.

Tomoyuki Arakawa, Introduction to W-algebras and their representation theory, In: Callegaro F., Carnovale G., Caselli F., De Concini C., De Sole A. (eds) Perspectives in Lie Theory. Springer INdAM Series, vol 19. Springer, 2017.

T. Arakawa, V. Futorny and L.-E. Ramirez, Weight representations of admissible affine vertex algebras, Comm. Math. Phys. 353 (2017), no.3, 1151-1178.

T. Arakawa, T. Creutzig, K. Kawasetsu and A. Linshaw) Orbifolds and cosets of minimal W-algebras, Comm. Math. Phys., October 2017, Volume 355, Issue 1, pp 339-372.

T. Arakawa and A. Premet, Quantizing Mishchenko-Fomenko subalgebras for centralizers via affine W-algebras, Trans. Moscow Math. Soc. 2017, 217-234.

[学会発表](計 45 件)

T. Arakawa, "W-algebras as generalization of infinite-dimensional Lie algebras", colloquium, Erlangen, Germany, December 3, 2013.

T. Arakawa, "W-algebras and Vinberg's problem for centralizers", Symmetries in Mathematics and Physics II in honor of Prof. Victor Kac's 70th birthday, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, June 28, 2013.

T. Arakawa, "Introduction to representation theory of W-algebras", Mini-course lecture, The University of Sydney, April 2013.

T. Arakawa, "An application of affine W-algebras", Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, Taitung University, Taiwan, March 27, 2013.

T. Arakawa, "Minimal models of W-algebras", Algebraic Lie theory and representation theory, The International Centre for Mathematical Sciences (ICMS), Edinburgh, UK, September 1, 2014.

T. Arakawa, "Feigin-Frenkel, Adamovic-Milas, and Frenkel-Kac-Wakimoto", Workshop Lie theory and mathematical physics, CRM, Universite de Montreal, Canada, May 22, 2014.

T. Arakawa, "The Frenkel-Kac-Raul-Wang conjecture and quantized Drinfeld-Sokolov reduction", Hualien Workshop on Finite Groups, VOA, Algebra Combinatorics and Related Topics, National Dong Hua University, Taiwan, March 22, 2014.

T. Arakawa, "Introduction to W-algebras and their representation theory (12 hours lectures)", Vertex algebras, W-algebras, and applications, The Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, December 2014-January 2015.

T. Arakawa, "Modular invariance of trace functions of Kac-Wakimoto admissible representations" Lie and Jordan algebras, Their representations and Applications VI, dedicated to Efin Zelmanov's 60th birthday, December 13-19, 2015, Bento Goncalves, Brazil.

T. Arakawa, "Sheets and affine vertex algebras", Vertex operator algebra and Related Topics, September 10, 2015, Sichuan University, Chengdu, China.

T. Arakawa, "Joseph ideals and Lisse minimal W-algebras", Summer School and Workshop on Lie Theory and Representation Theory IV, July 2, 2015, East China Normal University, Shanghai, China.

T. Arakawa, “Admissible representations and minimal models of W-algebras (two talks)”, Representation Theory XIV, July 23 and 25, 2015, Dubrovnik, Croatia.

T. Arakawa, “Associated varieties of vertex algebras”, MIT Infinite Dimensional Algebra Seminar, February 05, 2016, MIT, USA.

T. Arakawa, “Deligne exceptional series, Feigin-Frenkel conjecture, and W-algebras”, Representation theory and symplectic singularities in honour of Sasha Premet’s 60th birthday April 4, 2016, ICMS, Edinburgh, UK.

T. Arakawa, “Pentagonal number theorem and representation theory”, Colloquium, April 21, 2016, University of Virginia, USA.

T. Arakawa, “Vertex algebras and symplectic varieties”, Algebra Seminar, University of Virginia, April 22, 2016.

T. Arakawa, “Vertex algebras and symplectic varieties”, CMSA Special Mathematical Physics Seminar, Harvard University, May 13, 2016.

T. Arakawa, “The Adamovic-Milas conjecture and application”, Colloquium, University of Zagreb, Croatia, June 1, 2016.

T. Arakawa, “Beyond C2-cofiniteness”, Seminar on Algebra, University of Zagreb, Croatia, June 7, 2016.

T. Arakawa, Equivariant affine W-algebras, “Nilpotent Orbits and Representation Theory”, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi (CRM), June 16, 2016.

⑲ T. Arakawa, “On the 2d TQFT associated with vertex algebras”, Conference in Finite Groups and Vertex Algebras dedicated to Robert L. Griess on the occasion of his 71st birthday, August 26, 2018.

⑳ T. Arakawa, “On the 2dTQFT associated with vertex algebras”, MIT Infinite Dimensional Algebra Seminar, September 9, 2016.

㉑ T. Arakawa, “Vertex algebras and symplectic varieties”, Colloquium, University of Texas at Arlington, September 30, 2016.

㉒ T. Arakawa, “Vertex algebras and symplectic varieties”, Colloquium, the University of Poitiers, France, November 2, 2016.

㉓ T. Arakawa, “Moore-Tachikawa conjecture and chiral algebras of class S”, Sydney-UNSW Joint Colloquium,

November 25, 2016.

㉔ T. Arakawa, “Moore-Tachikawa conjecture and chiral algebras of class S”, 60th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, December 5, 2016.

㉕ T. Arakawa, “Associated varieties of vertex algebras” Exact operator algebras in superconformal field theories, Perimeter Institute for Theoretical Physics, December 14, 2016.

㉖ T. Arakawa, “Construction of genus zero chiral algebras of class S”, Exact operator algebras in superconformal field theories, Perimeter Institute for Theoretical Physics, December 14, 2016.

㉗ T. Arakawa, “Moore-Tachikawa conjecture and chiral algebras of class S”, Seminaire Geometrie Algebrique, Laboratoire Paul Painleve, Universite de Lille, January 31, 2017.

㉘ T. Arakawa, “Moore-Tachikawa conjecture and chiral algebras of class S”, 7th Seminar on Conformal Field Theory, February 3, 2017, Technische Universitat Darmstadt.

㉙ T. Arakawa, “GKO construction of minimal series W-algebras”, MIT Infinite Dimensional Algebra Seminar, February 17, 2017.

㉚ T. Arakawa, “Vertex operator algebras and symplectic varieties”, Colloquium, UC Santa Cruz, USA, March 7, 2017.

㉛ T. Arakawa, Coset Construction of W-algebras, Algebra and Number Theory Seminar, UC Santa Cruz, March 10, 2017.

㉜ T. Arakawa, “Affine W-algebras”, School Seminar, The University of Melbourne, April 26, 2017.

㉝ T. Arakawa, “Moore-Tachikawa conjecture and vertex algebras”, Representation Theory XV, June 21, 2017.

㉞ T. Arakawa, “Joseph ideals and Higgs branches”, Algebraic Modes of Representations The Canicular Days, September 18, 2017.

㉟ 荒川 知幸, アフィン W 代数をめぐって—表現論とヒッグス枝予想—, 日本数学会秋季賞受賞講演, 山形大学, 2017年9月12日.

㊱ T. Arakawa, “Vertex algebras and Higgs branch conjecture”, MIT Infinite Dimensional Algebra Seminar, September 22, 2017.

㊲ T. Arakawa, “Chiralization of Moore-Tachikawa conjecture”, Representation Theory, UMassAmherst, September 25, 2017.

㊳ T. Arakawa, “Representation theory of W-algebras and Higgs branch conjecture”, Algebra Seminar, Kansas State University,

November 27, 2017.

④① T. Arakawa, “ Vertex Algebras and Symplectic Varieties ”

William J. Spencer Lectures, Kansas State University, November 28, 2017.

④② T. Arakawa, “ Higgs branch conjecture for Class S theories ” , Affine, Vertex and W-algebras, December 14, 2017.

④③ T. Arakawa, “ Vertex algebras and symplectic varieties ” ,Algebra and Combinatorics Seminar, North Carolina State University, January 12, 2018.

④④ T. Arakawa, “ Chiralization of Moore-Tachikawa 2d TQFTs ” , The 3rd KGU Mathematics Workshop for Young Researchers, February 17, 2018.

④⑤ T. Arakawa, “ On recent development of representation theory of W-algebras and related topics ” Gauge theory, geometric Langlands and vertex operator algebras, March 24, 2018.

(4)研究協力者

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

荒川 知幸 (ARAKAWA, Tomoyuki)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号:40377974

(2)研究分担者

山田裕理 (YAMADA, Hiromitchi)

一橋大学・経済学研究科・教授

研究者番号: 50134888

山内博 (YAMAUCHI, Hiroshi)

東京女子大学・現代教養部・准教授

研究者番号: 40452213

和田堅太郎 (WADA, Kentaro)

信州大学・理学部・准教授

研究者番号: 60583862

(3)連携研究者