研究成果報告書 科学研究費助成事業

今和 元 年 6 月 3 日現在

機関番号: 14401

研究種目: 基盤研究(B)(一般)

研究期間: 2013~2018

課題番号: 25287010

研究課題名(和文) Donaldson-Tian-Yau予想の存在問題の研究

研究課題名(英文) The study of the existence problem in the Donaldson-Tian-Yau conjecture

研究代表者

満渕 俊樹(MABUCHI, Toshiki)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号:80116102

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 9,900,000円

研究成果の概要(和文):特殊計量の存在に関する Donaldson-Tian-Yau 予想は, Kaehler-Einstein 計量の場合は Chen-Donaldson-Sun や Tian によって解決したが,より一般の extremal Kaehler 計量の場合は未解決の難問として知られている.この未解決問題の解決を目指して,我々の導入した相対強 K-安定性の仮定の下に,相対漸近 Chow 安定性が成り立つことを示した.その結果,目的の extremal Kaehler 計量に収束するべき polybalanced 計量列が存在し、ある種のアプリオリ評価を得た、また関連する諸問題についての結果も得た、

研究成果の学術的意義や社会的意義 特殊計量の存在に関する Donaldson-Tian-Yau 予想は , 複素幾何における中心問題のひとつとして知られてい る、たとえば、この予想の Kaehler-Einstein 計量の場合は、最近 Chen-Donaldson-Sun や Tian によって肯定的に解決されたが、これはケーラー幾何において、フィールズ賞受賞者である Yau がカラビ予想を解決したとき以来の、初めての本格的な結果として知られている。さらに予想を、より一般の extremal Kaehler 計量の場合に解決することも非常に大きな学術的意義があり、その意味でも我々の研究には少なからぬ価値があると考え られる.

The Donaldson-Tian-Yau conjecture for anti-canonical polarization was 研究成果の概要(英文): recently solved affirmatively by Chen-Donaldson-Sun and Tian. However, this conjecture is still open for general polarizations or more generally in extremal Kaehler cases. We mainly worked in this unsolved cases of the conjecture.

For a polarized algebraic manifold, by introducing the concept of strong relative K-stability, we showed that strong relative K-stability implies asymptotic relative Chow stability. In particular, a strong relative K-stable polarized algebraic manifold always admits a sequence of polybalanced metric that are expected to converge to an extremal Kaehler metric in the polarization class. This then shows that the sequence of polybalanced metrics admits a suitable a priori bound. Moreover, we obtained a couple of results on the related problems.

研究分野: 複素微分幾何学

キーワード: Donaldson-Tian-Yau予想 K-安定性 テスト配位 Donaldson-二木不変量 偏極代数多様体 定スカラー曲率Kaehler計量 extremal Kaehler計量

1.研究開始当初の背景

偏極代数多様体の K-安定性とは、Kaehler-Einstein 計量の存在を特徴付けるために Tian が 1990 年代に導入した概念で、偏極代数多様体の特殊退化の一般化された二木不変量が負定値、 すなわち不変量は常に零以下で、しかも零となるのは退化が積構造をもつ場合のみと定めた。 2000 年代に入って、この概念をより一般の場合に拡張したのが Donaldson で、テスト配位によって得られる任意の退化の Donaldson-二木不変量が常に負定値であるときにK-安定と言うことにしたが、これにより K-安定性の定義は非常に明確なものとなった。

Donaldson-Tian-Yau 予想については、カラビ予想の一般化として、Kaehler-Einstein 計量の存在を K-安定性で特徴付けるものであるが、さらにその extremal Kaehler 版になると、Szekelyhidi の定式化が有名で、計量の存在を相対 K-安定性で特徴付けるものである。

これら予想は、計量の存在から安定性を導く方向については、Stoppa や Szekelyhidi らによるものが知られているが、その逆方向の安定性から計量の存在を導く方向(いわゆる計量の存在問題)については、カラビ予想のリッチ曲率が正の場合の未解決部分を含むので、重要ではあるが非常に困難な問題として知られるに至った。

(我々の研究課題の開始間もなく、Kaehler-Einstein 計量の場合には、そうした計量の存在の K-安定性による特徴付けが、Chen-Donaldson-Sun および Tian により得られた。)

2.研究の目的

ケーラー多様体上の正則ベクトル束に関する小林-ヒッチン対応の重力場版として、またカラビ予想のリッチ曲率が正の場合の未解決部分の一般化として、一般の偏極をもつ偏極代数多様体に対して、Donaldson-Tian-Yau 予想の extremal Kaehler 版、すなわち

- (a)「extremal Kaehler 計量の存在と相対 K-安定性は同値であろう」という予想に何らかの解決を与えることが我々の一つの目的である。
- (b) さらに Einstein 計量等の具体的構成の試行を行うことも目的とした。実際、研究分担者である中川氏との共同研究で、Kaehler-Einstein Fano 多様体上の二木不変量が消えない P^1 -束上に Sasaki-Einstein 計量を構成することに成功した。また、これをさらに toric 束の場合にも拡張することも目指した。

3.研究の方法

研究代表者は研究分担者と協力して、テスト配位、K-安定性、Donaldson-二木不変量、Chow-漸近安定性、Chow norm、相対安定性、Donaldson-Tian-Yau 予想等に関する勉強会を繰り返 し開き、知見を深めるとともに、我々は次の研究プログラムに沿って研究を遂行した。

- (a) テスト配位全体の空間の何らかの完備化を構成して、Donaldson-二木不変量の定義域をその完備化にまで拡張する。
- (b) K-安定性の定義を少し強めて、上の完備化上での拡張された Donaldson-二木不変量がある種の負定値性をもつときに強 K-安定と呼ぼう。また Szekelyhidi の定式化に従って、これからさらに相対強 K-安定性の概念も導入することにする。
- (c) 上の(a), (b)の仮定の下に、偏極代数多様体に対して「extremal Kaehler 計量の存在と相対 強 K-安定性は同値であろう」という、もとの予想よりはもう少し弱い形の予想を考察する。

これらの各未解決部分の詳細を詰めることにより、研究目的達成への道筋を確立した。一方で、 金沢での国際複素幾何シンポジウムを毎年開催することにより、国際的な発表や情報交換の場 を設けるとともに、国際的なレビューを受けた。

また研究課題に関連する書物や雑誌を、我々の研究を基礎から支える備品として購入した一方、理論の予測やチェックを行うための数値実験用計算機ソフトも研究に不可欠な消耗品として購入し活用した。

4. 研究成果

各テスト配位に対して定義される Donaldson-二木不変量を、指数が無限大に発散するテスト配位列全体の成すモジュライ空間上で定義された不変量に拡張することに取り組み、次の結果を得た。

(1)論文「The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, Progress in Math.第308巻」において、このような拡張が可能であることを示し、さらに一般の偏極代数多様体に置いて強K-安定性という概念を導入した。特に正則自己同型群が離散的なら定スカ

ラー曲率ケーラー計量をもつような偏極代数多様体は強 K-半安定である。これらの結果は Birkhaeuser 社の小林記念論文集に掲載された。この新しく導入された強 K-安定性の概念が、 以下のように漸近 Chow 安定性と深い関係があることが分かった。

(2)新田泰文氏(東工大)との共著「Strong K-stability and asymptotic Chow stability, Progress in Math.第 308 巻」で、一般の偏極代数多様体に対して、相対強 K-安定性から漸近相対 Chow 安定性が従うことを示した。この結果を用いると相対強 K-安定性の仮定の下に、polybalanced 計量の列が得られるので、これは定スカラー曲率ケーラー計量のみならずextremal Kaehler 計量の存在問題においても非常に重要な役割を果たすと思われる。

上の(1)と(2)をさらに発展させた論文

(3)「The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I」を Springer Proc.Math.Stat.の第 154 巻に発表した。この論文では強 K-安定性からある種のアプリオリ評価と定スカラー曲率ケーラー計量の存在を導く具体的なプランを提示した。(相対強 K-安定性の場合にも全く同じ議論が成り立ち、ある種のアプリオリ評価により、extremal Kaehler 計量の存在に繋がる具体的なプランも得られる。)

さらに、我々の研究課題の一環として

- (4) 論文「An ℓ-th root of a test configuration of exponent ℓ」も雑誌 Complex Mainfold の 第3巻に掲載され、テスト配位のモジュライ空間のある種の有界性を示した。
- (5) 論文「Asymptotic polybalanced kernels on extremal Kaehler manifolds, Asian J. Math. vol. 22」において、extremal Kaehler 計量をもつ偏極代数多様体は漸近相対 Chow 安定であることを示した(同様の結果は Seyyedali によっても得られた)。これは「extremal Kaehler 計量をもつ偏極代数多様体は相対強 K-安定性となるであろう」という予想を支持する事実となっている。
- (6) 論文「New examples of Sasaki-Einstein manifolds, Tohoku Math. J. vol. 65」で研究分担者である中川氏との共同で、Kaehler-Einstein Fano 多様体上の二木不変量が消えない P¹-束上に Sasaki-Einstein 計量を構成することに成功した。この結果は、さらに中川氏による最近の論文「Kaehler-Ricci solitons on certain toric bundles」(Kyushu J. Math.から出版予定)によって toric 束の場合にも拡張可能となった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計7件)

[1] <u>T. Mabuchi</u>: Asymptotic polybalanced kernels on extremal Kaehler manifolds, 查読有, Asian J. Math., vol. 22, 2018, 647—664

DOI: 104310/AJM.2018.v22.n4.a2

- [2] <u>T. Mabuchi</u>: The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I, 查読有, Springer Proc. Math. Stat., vol. 154, 2016, 235—245
- [3] $\underline{\text{T. Mabuchi}}$: An ℓ -th root of a test configuration of exponent ℓ , 査読有, Complex Manifolds, vol. 3, 2016, 169—185

DOI: 10.1515/coma-2016-0005

- [4] <u>T. Mabuchi</u>: The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, 查読有, Progress in Math., Birkhaeuser, vol. 308, 2015, 395-403
- [5] <u>T. Mabuchi and Y. Nitta</u>: Strong K-stability and asymptotic Chow-stability, 查読有, Progress in Math., Birkhaeuser, vol. 308, 2015, 405-411
- [6] <u>T. Mabuchi</u>: Relative stability and extremal metrics, 査読有, J. Math. Soc. Japan, vol. 66, 2014, 535—563

DOI: 10.2969/jmsj/06620535

[7] <u>T. Mabuchi and Y. Nakagawa</u>: New examples of Sasaki-Einstein manifolds, 查読有, Tohoku Math. J., vol. 65, 2013, 243-252

DOI: 10.2748/tmj/1372182724

〔学会発表〕(計8件)

- [1] <u>T. Mabuchi</u>: Stabilities in the existence problem of extremal metrics, Global Aspects of Projective and Kaehler Geometry, 2019年1月5日,招待講演, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Sanya (China)
- [2] <u>T. Mabuchi</u>: Extremal Kaehler versions of the Yau-Tian-Donaldson conjecture, 2018 年 3 月 16 日,招待講演, Modern Mathematics Lecture Series, YMSC, Beijing (China)
- [3] <u>T. Mabuchi</u>: Polybalanced metrics associated to extremal Kaehler metrics, Complex Geometry Conference in honor of Prof. Ngaiming Mok, 2016 年 10 月 19 日, 招待講演, KIAS, Seoul (Korea)
- [4] <u>T. Mabuchi</u>: Strong K-stability for general polarizations, Recent Advances in Kaehler Geometry, 2015 年 5 月 19 日,招待講演, Vanderbilt University, Nashiville (USA)
- [5] <u>T. Mabuchi</u>: K-stability and strong K-stability, 2014 年 7 月 14 日, 招待講演, Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing (China)
- [6] <u>T. Mabuchi</u>: Donaldson-Tian-Yau's conjecture for general polarization, Ricci curvature: Limit Spaces and Kaehler Geometry, 2013 年 7 月 12 日,招待講演, ICMS, Edinburgh (UK)
- [7] <u>T. Mabuchi</u>: The Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, The Asian Mathematical Conference 2013, 2013 年 7 月 1 日,招待講演, BEXCO, Seoul (Korea)
- [8] <u>T. Mabuchi</u>: A new version of the Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, Workshop "Extremal Kaehler Metrics", 2013 年 5 月 28 日, 招待講演, CRM, Montreal (Canada)

[図書](計件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

- 6. 研究組織
- (1) 研究分担者

研究分担者氏名:中川 泰宏

ローマ字氏名: NAKAGAWA, Yasuhiro

所属研究機関名:佐賀大学

部局名:大学院工学研究科

職名:教授

研究者番号(8桁):90250662

研究分担者氏名:新田 泰文

ローマ字氏名: NITTA, Yasufumi 所属研究機関名:東京工業大学 部局名:大学院理工学研究科

職名:助教

研究者番号(8桁):90581596

研究分担者氏名:後藤 竜司 ローマ字氏名:GOTO, Ryushi

所属研究機関名:大阪大学 部局名:大学院理学研究科

職名:教授

研究者番号(8桁): 30252571

(2)研究協力者 研究協力者氏名: ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。