

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25287014

研究課題名(和文)量子不変量を用いた低次元幾何学の離散量子化の研究

研究課題名(英文)Discrete quantization of low-dimensional geometry with quantum invariants

研究代表者

村上 順 (Murakami, Jun)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90157751

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,400,000円

研究成果の概要(和文)：結び目や3次元多様体の量子不変量を用いて、低次元、すなわち2次元、3次元の幾何学の離散量子化の構成を目指した。そのため、カラードジョーンズ不変量だけでなく、カラードアレキサンダー不変量、ヘニングス不変量、対数型不変量といった多様な量子不変量とそれらの関係について調べ、また、空間グラフの量子不変量についても研究を行い、対応する幾何的な構造との関係を調べた。とくに、幾何構造から定まる双曲体積については上で述べた多くの量子不変量で対応が見つかることを明らかにできた。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to construct discretized quantum geometry for 2 and 3 dimensional case. To do this, various quantum invariants and their relations are studied. For example, we study the colored Jones invariant, the colored Alexander invariant, the Hennings invariant and the logarithmic invariant. Quantum invariants for knotted graphs and its relation to the geometric structure is also studied. Especially, we get the relation between quantum invariants and hyperbolic volume determined by the geometric structure for various quantum invariants.

研究分野：トポロジー

キーワード：低次元トポロジー 量子不変量 双曲幾何学 3次元多様体 結び目

1. 研究開始当初の背景

(1) 1884年の V. Jones による結び目のジョーンズ多項式の発見を契機として、結び目や3次元多様体の数多くの量子不変量が構成された。2000年前後にこれらの不変量と幾何構造の関係が R. Kashaev の研究をきっかけとして次第に明らかになってきた。この関係を「体積予想」と呼んでいるのであるが、量子不変量の準古典極限を考えることで結び目補空間の双曲構造が直接見えようになってきた。

(2) 研究開始の時点では、体積予想のような対応はごく限られた結び目の不変量についてしか明らかにされておらず、一般の3次元多様体やその中の結び目に対して同じような理論があるかどうかは知られていなかった。

(3) 幾何学の量子化についてはこれまでもゲージ理論を始めとする様々な手法により多様な試みがなされているが、長さや角度といったものを離散化した量子化はまだ構成されていない。

2. 研究の目的

(1) 結び目や3次元多様体の量子不変量とその体積予想に着目し、長さや角度といった幾何学の基本的なパラメータを離散化した量子化を構成する。

(2) 通常の3次元空間中の結び目だけでなく、一般の3次元多様体やその中の結び目に対しても幾何構造と量子不変量との関係を明らかにし、離散量子化された幾何構造がどのようなものかを一般的に明らかにする。

(3) 幾何構造と対応する量子不変量としてより自然なものを構成する。

3. 研究の方法

(1) 結び目のカラードジョーンズ多項式に関連した体積予想の証明を進める。体積予想の証明は量子2重対数関数、ポアソン和公式、鞍点法を組み合わせることで行われるので、これらについて専門家と研究連絡を行いながら理解を深める。

(2) 対数型不変量を用いて、体積予想を3次元多様体やその中の結び目に拡張する。

(3) 体積予想を空間グラフに拡張し、その補空間の幾何構造との対応を調べる。

4. 研究成果

(1) まずこれまで知られている体積予想について、その幾何学的意味を整理した。横田(参考文献)により Kashaev によるオリジナルの予想に対する幾何学的説明は得られていたのであるが、この体積予想で得られ

るものが本当に幾何学的な双曲体積と一致するかどうかははっきりしていなかった。それに対し、雑誌論文では量子R行列からの構成法に対する幾何学的解釈を与えた。この解釈を用いることで、幾何学的な双曲体積が必ず得られることが参考文献で示されており、体積予想における根本的な疑問の1つを解決することができた。

(2) 量子不変量とは、主としてリー環の量子化である量子群から構成されている。体積予想に関連する結び目の量子不変量を量子群の表現論的観点から見直し、以前参考文献において研究を行っていた対数型不変量が幾何学的な性質とうまく対応することを見出した。対数型の不変量はカラードアレキサンダー不変量の特殊化として得られるのだが、このカラードアレキサンダー不変量を結び目だけでなく3次元空間中の空間グラフに拡張し、特に4面体に対応するグラフに関して、不変量と四面体の双曲体積との関係を明らかにした。(雑誌論文)さらに4価以上の価数の頂点を持つ空間グラフに関してカラードアレキサンダー不変量を拡張し、双曲体積との関係を調べた。(雑誌論文)

(3) 対数型の結び目の不変量とその結び目を軸とする錘多様体の双曲体積と対応するのだが、これを一般の3次元多様体中の結び目の不変量に拡張し、結び目補空間の双曲体積との関係を調べた。(雑誌論文)対数型不変量を3次元多様体中の結び目の不変量に拡張するために、ヘニングス不変量を用いた。ヘニングス不変量は参考文献で構成された不変量で、対数型不変量の構成に用いられる制限された量子群に対し、これが有限次元のホップ代数であるということに注目し、有限次元ホップ代数の右積分と呼ばれる関数が結び目のカービー変形と相性が良いことを利用して作られた不変量である。対数型不変量とヘニングス不変量は同じ量子群をベースとしているため、自然に統合することができた。

(4) 空間グラフの特別な場合として平面グラフがある。平面グラフは曲面上に描くことで多面体を表すグラフともみなすことができる。体積予想の空間グラフへの拡張をこの多面体を表すグラフに適用することで、双曲多面体や3次元球面内の多面体の体積を計算するための新しい手法を得ることができた。(雑誌論文)

(5) 4価以上の頂点を持つ空間グラフに対する量子不変量である横田不変量を用いて、ハンドル体結び目の不変量を得た。ハンドル体結び目は、ハンドル体を3次元空間に埋め込んだもののことである。結び目の場合には、ほとんどの場合についてその補空間に双

曲構造が入ることが知られているが、その構造は、トーラスと同様な境界のある多様体で、境界は双曲構造から定まる距離に関してどの点からも無限に遠いところにある。これに対し、ハンドル体結び目では、境界は種数のある曲面となり、補空間に双曲構造が入る場合には、その境界の曲面は有限の場所にあり、境界面は測地的になっている。すなわち、幾何構造に関して平らになっているのである。このような幾何学的性質が、この新しく構成されたハンドル体結び目の準古典極限の様子と対応することを明らかにした。(雑誌論文)

(6) 対数型不変量の表現論的背景として、特殊化された量子群の半単純ではない表現が重要であることが既にわかっていた(参考文献)。量子群の量子化のパラメータ q が一般の変数であるときは量子群の有限次元表現は既約な表現の直和となるのだが、 q を 1 の冪根にすると必ずしも既約表現に分解するとは限らない。このような既約でない表現を q が一般のときの既約な表現から構成する手法を用いて、対数型不変量のカラーDJONZ不変量による表示を得た。(参考文献) 対数型不変量をカラーアレキサンダー不変量から得る公式は参考文献で得られていたのであるが、本研究では、カラーDJONZ不変量で q が一般の変数のものの、 q による 1 階微分を用いて対数型不変量を得ることができ、既存のよく知られた不変量から対数型不変量の研究を進める新しい手法を与えることができた。

(7) 本研究を進めている途中で、2015年の春に Chen と Yang による参考文献でもって、量子不変量の体積予想についての新しい展開がもたらされた。体積予想の研究では、多くの場合量子不変量の q を 1 の原子 n 乗根に特殊化する必要があり、これまでは $q = \exp(2\pi i/n)$ と置いていたのであるが、彼らはこれをその 2 乗、すなわち $\exp(4\pi i/n)$ とすることで、これまで結び目で見られなかった双曲体積と量子不変量との関係が 3 次元多様体の量子不変量についても成り立つことを見出した。この手法を空間グラフの量子不変量やカラーDJONZ多項式に適用することで、多様な状況のもとで量子不変量と対応する 3 次元多様体の双曲体積とが対応することが明らかとなった。(学会発表)

(8) 量子不変量と対応する 3 次元多様体の双曲体積が対応するという体積予想は幾何学だけでなく物理学や整数論においても注目されている。そこで 2016 年 9 月に体積予想に関心を持つ研究者を集めた研究会を開催し、交流をはかった。その成果として、この研究会の参加者である物理学の研究者が数理物理的視点から体積予想を一般的に

扱った研究が発表された。(参考文献)

参考文献

Dongmin Gang, Mauricio Romo, Masahito Yamazaki, All-Order Volume Conjecture for Closed 3-Manifolds from Complex Chern-Simons Theory, arXiv: 1704.00918

Qingtao Chen, Tian Yang, A volume conjecture for a family of Turaev-Viro type invariants of 3-manifolds with boundary, arXiv: 1503.02547

Jun Murakami, From colored Jones invariants to logarithmic invariants, arXiv:1406.1287, Tokyo Journal of Mathematics に掲載予定

Jinseok Cho, Optimistic limit of the colored Jones polynomial and the existence of a solution. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.144, no.4, 2016, pp.1803-1814.

Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol.20, no.7, 2011, pp.955-976.

Jun Murakami, Kiyokazu Nagatomo, Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups, International Journal of Mathematics Vol.19, no.10, 2008, pp.1203-1213.

Jun Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds, Osaka Journal of Mathematics, Vol.45, no.2, 2008, pp.541-564.

Louis H. Kauffman, David E. Radford, Invariants of 3-manifolds derived from finite-dimensional Hopf algebras, Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol.4, no.1, 1995, pp.131-162.

Mark A. Hennings, Hopf algebras and regular isotopy invariants for link diagrams, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.109, no.1, 1991, pp.59-77.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Jun Murakami, Generalized Kashaev invariants for knots in three manifolds. Quantum Topology, 査読有, Vol.8, no.1,

2017, pp.35-73,
doi:10.4171/QT/86

Atsuhiko Mizusawa, Jun Murakami, Yokota type invariants derived from non-integral highest weight representations of $Uq(\mathfrak{sl}_2)$. Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.25, no.10, 2016, 1650054, 21 pp,
doi.org/10.1142/S0218216516500541

Alexander Kolpakov, Jun Murakami, The dual Jacobian of a generalised hyperbolic tetrahedron, and volumes of prisms. Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.39, no.1, 2016, pp.45-67.
http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tjm/1471873312

Atsuhiko Mizusawa, Jun Murakami, Invariants of handlebody-knots via Yokota's invariants. Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.22, no.11, 2013, 1350068, 21 pp.
doi.org/10.1142/S0218216513500685

Francesco Costantino, Jun Murakami, On the $SL(2, \mathbb{C})$ quantum $6j$ -symbols and their relation to the hyperbolic volume. Quantum Topology, 査読有, Vol.4, no.3, 2013, pp.303-351.
DOI:10.4171/QT/41

Alexander Kolpakov, Jun Murakami, Volume of a doubly truncated hyperbolic tetrahedron. Aequationes Mathematicae, 査読有, Vol.85, no.3, 2013, pp.449-463.
doi:10.1007/s00010-012-0153-y

Jinseok, Cho, Jun Murakami, Optimistic limits of the colored Jones polynomials. Journal of Korean Mathematical Society, 査読有, Vol.50 no.3, 2013, pp.641-693.
doi:10.4134/JKMS.2013.50.3.641

〔学会発表〕(計14件)

村上順, On the volume conjecture for quantum $6j$ symbols, Workshop on Teichmüller and Grothendieck-Teichmüller theories, 2016年7月27日, 天津(中国)

村上順, On the volume conjecture of various $SO(3)$ invariants, Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces, 2016年6月24日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

村上順, Logarithmic invariant of knots and its applications, Braids, Configura-

tion Spaces, and Quantum Topology, 2015年9月7日, 東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)

村上順, Logarithmic invariants of knots in a three manifold, New Developments in TQFT, 2015年7月31日, オーフス(デンマーク)

村上順, Volumes of hyperbolic and spherical polyhedrons, 8th Australia New Zealand Mathematics Convention, 2014年12月8日,メルボルン(オーストラリア)

村上順, Logarithmic knot invariants and hyperbolic volumes, Knots and Low Dimensional Manifolds, 2014年8月25日, 釜山(韓国)

村上順, Logarithmic invariant of knots, Quantum Curves and Quantum Knot Invariants, 2014年6月19日, バンフ(カナダ)

村上順, Generalized Kashaev invariants for knots in three-manifolds, Modern Trends in Topological Quantum Field Theory, Workshop II, 2014年3月20日, ウィーン(オーストリア)

村上順, Knots invariants coming from the small quantum group, 第58回代数学シンポジウム, 2013年8月26日, 広島大学理学部(広島県・西条市)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.f.waseda.jp/murakami/jun-home-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 順 (MURAKAMI, Jun)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 90157751

(2) 研究分担者

水澤 敦彦 (MIZUSAWA, Atsuhiko)
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号: 50707726