3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２９　年　　６　月　２３　日現在

機関番号：　１４５０１

研究種目：　基盤研究(B)（一般）

研究期間：　2013～2016

課題番号：　２５２８７０１８

研究課題名（和文）多変数特殊関数の理論と数値計算

研究課題名（英文）Theory and numerical evaluation of special functions of several variables

研究代表者

高山　信毅（Takayama, Nobuki）

神戸大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：３０１８８０９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　5,100,000円

研究成果の概要（和文）：巨大なA超幾何多項式の数値計算が可能になった．行列 1F1 の数値計算が実装面で大きく進展した．また，A-超幾何方程式の発散級数解の Borel 総和法的意味付けや，Heun 型の方程式も含む常微分方程式の発散級数解の Borel 総和法的意味付けがなされたことは，数値解析が通常の方法では困難な関数の大域的解析の道につながるものであり，今後，数値評価への応用も期待できる．

研究成果の概要（英文）：We give an algorithm to evaluate numerically big A-hypergeometric polynomials. An efficient implementation to evaluate numerically the matrix hypergeometric function 1F1 is given. We study divergent series solutions of A-hypergeometric equations and those of Heun type ordinary differential equations in terms of the Borel summability. These theoretical results help to analyze these functions globally and we hope that they give a new method for a numerical analysis of these functions.

研究分野：　特殊関数

キーワード：　超幾何関数　数値評価

1　研究開始当初の背景

超幾何関数の 1 変数版である Gauss の超幾何関数については, Mathematica や Maple で次のように数値が計算できる.

```
In[1]:= N[Hypergeometric2F1[1/2,1/2,1,-1]]
Out[1]= 0.834627

evalf(hypergeom([1/2,1/2],[1],-1));
0.8346268417
```

実際の計算には超幾何関数およびそれのみたす微分方程式の高度な知識が用いられており, Mathematica や Maple はそのアルゴリズムの詳細を公表していない. 同じレベルの計算を再現するにはかなりの努力を要する.

このような数値評価は統計学におけるパラメータ推定への応用をはじめとして数学的な予想に関する数値実験などさまざまな応用がある. しかしながら, 多変数の超幾何関数についての数値評価の研究は Appell F_1 を除いてほぼ皆無であった.

2　研究の目的

本研究では特殊関数, 特に多変数超幾何関数である Lauricella 関数, 行列超幾何関数, および A-超幾何関数 (Gel'fand, Kapranov, Zelevinski の 超幾何関数) の値を計算および解析する新手法を研究し, いままで不可能であったこれらの関数の値計算を実際に遂行することを目的とする.

これらの関数の数値計算の統計における重要性の発見および統計への応用方法の確立は, H25 年度に研究が終了する JST CREST "グレブナー基底と現代産業社会との調和" の最大の成果の一つであった. 本研究ではこの応用研究から生じた基礎的問題に挑戦し, さらなる応用への基盤を産み出していくことを視野に入れている.

3　研究の方法

特殊関数の計算には多くの数学領域が関連する. さまざまな戦略を用いて研究を進める. 戦略 (a). 特殊関数の値計算にはさまざまな分野からの総合的アプローチが不可欠である. 毎年超幾何学校, 超幾何方程式研究会を開催して最新の研究成果の共有をはかる. 戦略 (b). さまざまな多変数超幾何微分方程式をグレブナー基底の方法などを援用しつつ, 数値解析的に扱いやすい形 (Runge-Kutta 法が適用しやすい形など) に変形することを試みる. 戦略 (c). 接続公式の研究を行なう. 戦略 (d). Kummer 型公式の研究を行なう. 戦略 (e). 不確定特異点をもつ関数については, 最近の竹内潔らの A-超幾何積分のサイクル (積分領域) の構成や漸近展開の計算を, 値計算にも活用できる形にすることを目指す. 戦略 (f). 斎藤睦, F.Beukers は A-超幾何方程式が退化する必要十分条件を最近与えた. この証明を元に退化した方程式の解を実際に構成する. これにより退化したパラメータでの値計算を遂行する. 戦略 (g). 理論の構築とともに, 特殊関数の計算用のパッケージを開発し公開する. 戦略 (h). 松尾は Heckman-Opdam の方程式系を Pfaffian equation (integrable connection) の形に書き換える事に成功している. Pfaffian equation は関数の値の数値計算をやりやすい形であり, この結果を援用して数値計算を試みる. 方程式の特異点で関数自体が正則な場合は, 方程式系の制限の研究を行う.

4　研究成果

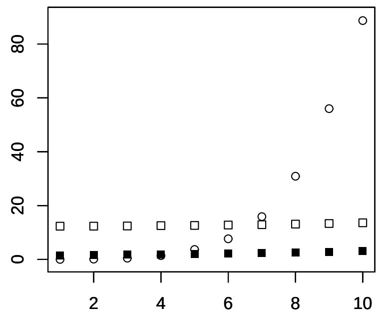
統計についてのプロジェクトと相互に刺激を受けながら, 多変数 A-超幾何関数の数値計算を大きく進めることができた. 特に巨大な A 超幾何多項式の数値計算が可能になったこと, 行列 ${}_1F_1$ の数値計算が大きく進展したこと, は特筆すべき成果である. また, A-超幾何関数の発散級数解の Borel 総和法的意味付けや, Heun 型の方程式も含む常微分方程式の発散級数解の Borel 総和法的意味付けがなされたこと

は, 数値解析が通常の方法では困難な関数の大域的解析の道につながるものであり, 今後数値評価への応用も期待できる. また超幾何学校および超幾何方程式研究会を毎年開催し, 最新の研究状況を研究コミュニティで共有することにつとめた.

以上の結果及びその他の成果についてより詳しく解説する.

4.1 A-超幾何多項式の Macaulay 型行列による高速計算

A-超幾何多項式の数値評価は項を列挙することにより原理的には可能であるが, 項の数が多くなってくると計算時間が大きくなるのが問題であり, この点をいかに乗り越えるかがひとつの大きな問題であった. この研究はこの困難を緩和するものである. A-超幾何多項式はパラメータについての holonomic 差分方程式を満たすのでグレブナー基底を用いればこの差分方程式系 (漸化式) を導出でき, これを用いて数値評価ができる (holonomic gradient method, HGM). この漸化式を計算していく計算量は holonomic rank の多項式オーダーであるので多項式の項の列挙による直接計算に比べて計算量は小さい. しかしながら, この手法 (HGM) は二つの問題点をもつ. 1. グレブナー基底の計算は一般に高い計算量を必要とする. 2. 差分方程式の特異点があると計算を先に進めることができない. この研究ではこの二つの問題点について解決法を与えた (発表 5). 1 については二つの手法 (a) (b) を与え、実装およびその評価を行った. (a) 日比, 西山, 高山による A-超幾何方程式の標準モノミアルの計算アルゴリズム (論文 1) を活用し, Macaulay 型行列をなるべく小さく構成し差分 Pfaffian を効率的に構成する. (b) Hilbert driven アルゴリズムによる　S-pair 検証の省略. 2 については, A が正規な場合に超幾何 b-関数を用いて特異点を回避する道を見つけるアルゴリズムおよびその実装を与えた. 実装は Risa/Asir contrib package `ot_hgm_ahg.rr` を公開中 (その他, ホームページ等 2).



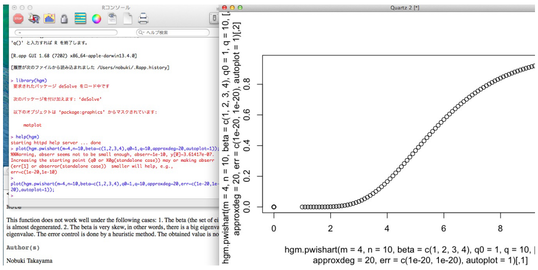
黒の■: ある A に対する Macaulay 型行列の方法の計算速度. 他は既存の方法. 横軸は β の大きさ (多項式の次数に対応).

4.2 Schrodinger 型常微分方程式についての Borel summability の研究

小池は Schafke と共に Schrodinger 型常微分方程式の Stokes グラフが saddle-free なら, Stokes グラフの face に対応する Stokes region で形式級数が summable であることを示し, さらに 各 Stokes region において, 対応する Laplace 積分表示が形式級数を漸近展開とする解析関数となっていることを示した (入門講演は発表 1).

4.3 行列 ${}_1F_1$ の数値解析ソフトウエアの開発

この関数は zonal 多項式で展開される関数でこの展開による計算はべき級数の和を計算するよりはるかに多い計算資源が必要であり数値評価が困難である. 微分方程式系を pfaffian system に変換し制限した常微分方程式の数値解析を行うことにより高速に数値評価を遂行する方法を別の統計関係プロジェクトとの共同研究により与えたが, この方法を実装しパッケージ hgm として公開した (論文 5, その他ホームページ等 1).



R で hgm パッケージを実行しているところ.

4.4 多変数 Lauricella 超幾何関数の基礎的性質の研究

Lauricella の多変数超幾何関数 F_C は基礎的な多変数超幾何関数であるが, その微分方程式系の特異超平面や rank , reducibility の厳密な考察は今までなされていなかった. この研究ではこれらを決定した (論文 6). これは数値計算アルゴリズムの基礎となる.

4.5 ねじれコホモロジ-の基底計算

A 超幾何系の standard モノミアルを決めるアルゴリズムの応用として, sparse な多項式の決める variety の補集合のねじれコホモロジ-の基底計算ができることを示した. さらに確率算法を用いることにより 大阿久-高山 の一般的アルゴリズム (1999) を用いるより高速に計算できることをさまざまな例題で示した. (論文 4)

4.6 Borel 変換による A-超幾何関数の積分表示と漸近展開

発散級数解は一般に漸近展開としての意味をもつが, この研究では, ある条件をみたす A に対して modified A-超幾何方程式の一次元的な発散級数解が Borel summable であることを示し, Laplace 積分表示を与えた (論文 3). この結果は積分表示による数値計算, および大域的解の挙動の解析のための基礎となる. Borel 変換/Lapalce 変換を活用し, 接続公式, 漸近展開公式を求め, さらにこれらの公式を活用して数値評価を実験的におこなった.

5 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

1. T.Hibi, K.Nishiyama, N.Takayama, Pfaffian Systems of A-Hypergeometric Equations I, Bases of Twisted Cohomology Groups. Advances in Mathematics 306 (2017) 303–327. 査読あり.

2. S.Kamimoto, T.Kawai and T.Koike, On the singularity structure of wkb solution of the boosted Whittaker equation: its relevance to resurgent functions with essential singularities, Letter in Mathematical Physics, 106 (2016), 1791–1815. 査読あり.

3. F.Castro-Jimenez, M.C.Fernandez-Fernandez, T.Koike, N.Takayama, Irregularity of Modified A-Hypergeometric Systems, Transaction of AMS, 367 (2015) 5415–5445. 査読あり.

4. T.Hibi, K.Nishiyama, N.Takayama, Computing Bases of Twisted Cohomology Groups for Sparse Polynomials, ACM Communications in Computer Algebra, 48 (2014), 118–120. 査読あり.

5. T.Koyama, H.Nakayama, K.Ohara, T.Sei, N.Takayama, Software Packages for Holonomic Gradient Method, Mathematial Software — ICMS 2014, 4th International Conference, Proceedings. Edited by Hoon Hong and Chee Yap, Springer lecture notes in computer science 8592, 706–712. 査読あり.

6. R.Hattori, N.Takayama, The singular locus of Lauricella's F_C, Journal of Mathematical Society of Japan, 66 (2014), 981–995. 査読あり.

7. T. Koyama, H. Nakayama, K. Nishiyama, N.Takayama, Holonomic Gradient Descent for the Fisher-Bingham Distribution on the n-dimensional Sphere, Computational Statistics, 29 (2014), 661–683. 査読あり.

8. T. Koyama, H. Nakayama, K. Nishiyama, N.Takayama, Holonomic Rank of the Fisher-Bingham System of Differential Equations, Journal of Pure and Applied Algebra, 218 (2014), 2060–2071. 査読あり.

9. S.Kamimoto and T.Koike, On the Borel summability of 0-parameter solutions of nonlinear ordinary differential equations, Kôkyûroku Bessatsu, B40 (2013), 191–212. 査読あり.

10. T.Koike and Y.Takei, Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear ordinary differential equations Kôkyûroku Bessatsu, B40 (2013), 293–312. 査読あり.

[学会発表] (計 24 件)

1. 小池達也, 完全 WKB 解析と Borel 総和法, 超幾何学校 2016, 神戸大学. 2016 年 9 月 1 日,2 日

2. Nobuki Takayama, A-Hypergeometric Distribution and Newton Polytpes, RIMS workshop, Algebraic Statistics and Symbolic Computation, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 7 月 25 日

3. 高山信毅, ホロノミック勾配法, 第 27 回 RAMP シンポジウム (RAMP2015), 静岡大学. 2015 年 10 月 15 日.

4. Tatsuya Koike, A remark on the growth order of Borel transform of WKB solutions of one-dimensional Schrödinger equations — Toward a proof of its multisummability, 超局所解析と特異摂動論, 京都大学数理解析研究所. 2015 年 10 月 9 日

5. 高山信毅, 差分方程式による A-超幾何多項式の計算, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学, 一般講演, 2015 年 9 月 13 日.

6. Tatsuya Koike, On a connection formula of WKB solutions of the “boosted” simple pole type operators of second order in exact WKB analysis Seminar of Algebra, Departento de Álgebra, Universidad de Sevilla, Spain. 2015 年 2 月 17 日

7. 高山信毅, ホロノミック系の数値解析の統計への応用微分方程式の総合的研究, 京都大学. 2014 年 12 月 21 日

8. Tatsuya Koike, On Voros coefficients and middle convolutions for linear ordinary differential equations with a large parameter, Several aspects of microlocal analysis, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 10 月 22 日

9. Nobuki Takayama, Introduction and recent progress of the holonomic gradient method, Computational Algebraic Statistics, Theories and Applications (CASTA 2014, Kyoto Teresa). 2014 年 1 月 22 日.

[図書] (計 2 件)

1. 高山 編, 超幾何学校 2013/2014 講義録. Rokko Lectures in Mathematics, 23 (2015).

2. 高山 編, 超幾何学校 2014/2015 講義録. Rokko Lectures in Mathematics, 24 (2016).

[産業財産権]
○ 出願状況 (計 0 件)
○ 取得状況 (計 0 件)
[その他] ホームページ等

1. N.Takayama, T.Koyama, T.Sei, H.Nakayama, K.Nishiyama, hgm: Holonomic Gradient Method and Gradient Descent, 1.11, 2015-04-03 (2015). Package for R,

http://cran.r-project.org/web/packages/hgm

2. http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM

6　研究組織

(1) 研究代表者
高山 信毅 (TAKAYAMA, Nobuki)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30188099
(2) 研究分担者
小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)
神戸大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 80324599
(3) 連携研究者
原岡 喜重 (HARAOKA, Yoshishige)
熊本大学・大学院先端科学研究部 (理)・教授
研究者番号: 30208665

松本 圭司 (MATSUMOTO, Keiji)
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号: 30229546
(4) 研究協力者