

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287019

研究課題名(和文) 複素力学系と C^* -環の研究研究課題名(英文) Research on complex dynamical systems and C^* -algebras

研究代表者

綿谷 安男 (Watatani, Yasuo)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：00175077

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,100,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では有理関数 R の反復合成のなす複素力学系から、ヒルベルト双加群を經由し作用素環である C^* -環を構成し、作用素環と複素力学系という二つの異なる分野の間に興味ある関係を見出すことができた。有理関数 R の作る複素力学系ようすが C^* -環上のゲージ作用からかなり復元できるということである。た分岐点のような特異点の構造を R から生成され C^* -環上の K 理論やゲージ作用の平衡状態(KMS状態)の言葉で表現した。自己相似写像から作られる C^* -環のコアのトレース空間の端点の構造を決定した。またそれらの C^* -環のイデアルの構造を解明した。テント写像の次元群が無限自由可換群とその上のシフトであることを示した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we associate C^* -algebras with complex dynamical systems of iterations of rational functions R using Hilbert bimodule, and we have found interesting relations between operator algebras and complex dynamical systems. We can recover some properties of complex dynamical systems of R from the associated C^* -algebras with the gauge action. We explain the structure of the singularity of branched points in terms of K -theory and KMS states for gauge actions. We determine the extreme points of the traces on the cores of the C^* -algebras associated with self-similar maps. We find their ideal structure. We showed that the dimension group of the tent map is the free abelian infinite group and the shift on it.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 複素力学系 自己相似写像 K -理論

1. 研究開始当初の背景

この研究では、複素力学系におけるサリヴァンの辞書を、非可換幾何学の立場から統一的に説明する。そのために、有理関数 R の反復合成 $(R^n)_n$ から Cuntz-Pimsner 構成による C^* -環を作り、クライン群からは接合積によって C^* -環を作り、この2種類の作用素環の間の共通する性質が、サリヴァンの辞書の対応を直接説明するものになる。リーマン球面 \hat{C} だけを扱うのは可換な幾何学になるが、リーマン球面 \hat{C} 上の複素力学系からは非可換な作用素環が作られ、非可換幾何学の研究の対象となる。クライン群の作用による接合積の方は、位相同型写像からつくるので昔からある構成法であるが、次数が2以上の有理関数は分岐被覆写像であり位相同型にはならないので、もう接合積の構成は使えない。そこで Deaconu-Muhly は有理関数の軌道からつくられた groupoid に付随する groupoid C^* -環を構成してみた。彼らの構成は、分岐点を除去したため、十分に分岐の情報が入り込めていない。そこで、私たちは分岐指数を使って R のグラフ上の連続関数全体 $X=C(\text{graph } R)$ に、リーマン球面 \hat{C} 上の連続関数全体 $C(\hat{C})$ を係数環とする、ヒルベルト双加群の構造をいれた。この双加群から普遍的に生成される C^* -環を $O_R(\hat{C})$ であらわし、有理関数 R の作る複素力学系がリーマン球面 \hat{C} 上で生成する C^* -環という。この構成を完全不変集合であるジュリア集合 J_R 上で同様に行ってできた Cuntz-Pimsner 環を $O_R(J_R)$ とかき有理関数 R の作る複素力学系がジュリア集合 J_R 上で生成する C^* -環という。この構成を完全不変集合であるファトウ集合 F_R 上で同様に行ってできた Cuntz-Pimsner 環を $O_R(F_R)$ とかき R の作る複素力学系がファトウ集合 F_R 上で生成する C^* -環という。以前の研究では分岐点のような特異点の構造を R から生成された C^* -環上の K 理論やゲージ作用の平衡状態 (KMS 状態) の言葉で表現することを考えた。

2. 研究の目的

この研究では有理関数 R の反復合成 $(R^n)_n$ のなす複素力学系から、ヒルベルト双加群を経由して作用素環である C^* -環を構成する。作用素環と複素力学系という全く異なる分野の相互連関について研究する。複素力学系のジュリア集合は自己相似性をもつフラクタル図形である。一方作用素環でも射影で切った環と全体の環が同型になる自己相似性を計る基本群という不変量がある。今回の研究ではこの全く異なった分野に同時にあらわれた自己相似性の秘密を解明する。さらに有理関数 R の反復合成とクライン群の理論の類似を示すサリヴァンの辞書を、そこから構成された C^* -環を使って、非可換幾何学の立場から、統一して説明することが高い目標である。 C^* -環の K 理論と平衡状態がもつ情報から、もとの複素力学系の情報を引き出せる期待がある。

記号力学系の場合には、その重要な不変量である次元群が、生成された C^* -環のコア (ゲージ作用の固定環) の K 群とその上の自己同型 (ゲージ作用の dual action が森田同値を介して導くもの) という形で対応していた。今回の研究では複素力学系から生成された C^* -環のコア (ゲージ作用の固定環) の K 群とその上の自己同型を調べることで、複素力学系の新しい普遍量を発見することも目指した。一方 Nekrashevych は self-similar group (自己相似群) に付随する C^* -環を考え、post-critically finite な有理関数の iterated monodromy group の場合には生成された C^* -環とゲージ作用の組が Julia set 上の複素力学系を復元することを示している。私たちの構成した C^* -環と Nekrashevych の構成した C^* -環の関係は、位相空間とその基本群の関係のようなもので、もう少し詳しくいうとその被覆空間版をつくってから生成した C^* -環を比べているのである。それ故、私たちの構成した C^* -環とゲージ作用の組もジュリア集合上の複素力学系の情報をかなり復元すると期待している。ジュリア集合は幾何学的な自己相似性をもつ。作用素環にも射影で切った環と全体の環が同型になる自己相似性を計る基本群という不変量がある。この全く異なった分野に同時に現われた自己相似性の秘密を解明するのも重要な目的の一つである。

3. 研究の方法

これからの研究で明らかにしたい次のような具体的な課題を設定して研究した。

(1) 「有理関数 R の作る複素力学系がジュリア集合 J_R 上で生成する C^* -環のコア (ゲージ作用の固定環) の K 群とその上の自己同型を決定せよ。」記号力学系の場合の強力な不変量の次元群に相当し生成する C^* -環があった。複素力学系でも新しい重要な不変量になる可能性を秘めている。

(2) 「有理関数 R の作る複素力学系がジュリア集合 J_R 上で生成する C^* -環のコアがいつ単純環になり、さらに一意なトレースを持つ特徴づけよ。」記号力学系の場合の 0-1 行列が primitive という条件に対応するものである。有理関数の双曲性と関連があるとにらんでいる。

(3) 「上の(2)が成立する場合に、コアの C^* -環の基本群を決定せよ。」 II_1 型因子環の自己相似性を計る数値的普遍量として、「基本群」が Murray と von Neumann によって導入されたが、最近縄田と綿谷は一意的なトレースをもつ単純な C^* -環の場合に「基本群」を導入することに成功した。複素力学系のジュリア集合は自己相似性をもつフラクタル図形であるので、これとコアの C^* -環の自己相似性を計る基本群とは関連があるに違いない。

(4) 「有理関数 R の反復合成とクライン群の理論の類似を示すサリヴァンの辞書を、そこから構成された C^* -環を使って、非可換幾何

学の立場から、統一して説明せよ。」例えばクライン群の極限集合への作用から接合積で作られる C^* -環は純無限単純環になり、有理関数 R の作る複素力学系がジュリア集合 J_R 上で生成する C^* -環も純無限単純環になる。

(5)「有理関数の iterated monodromy group のつくる self-similar group (自己相似群) に付随する Nekrashevych が導入した C^* -環と、私たちが構成した複素力学系に付随する C^* -環との関係は何か。」 $R(z) = z^n$ のような特別な場合は同型になることもわかってきたのでそれを深めたい。

(6)「2次の多項式 $R(z) = z^2 + c$ の場合複素力学系に付随する C^* -環の交換関係を記述せよ。」

(7)「超越整関数の場合の真正特異点を持つ困難を乗り越えて、付随する C^* -環を構成せよ。」

(8)「エノン写像のような多変数の正則写像の場合にも付随する C^* -環を構成せよ。」

4. 研究成果

研究が進展するにつれ、当初計画した目的とは違い、予期していない問題のほうが発展して研究成果をえることができたので、それを中心に含めて報告する。

この研究では有理関数 R の反復合成のなす複素力学系から、ヒルベルト双加群を経由して作用素環である C^* -環を構成する。作用素環と複素力学系という二つの異なる分野の間に興味ある関係を少しは見出すことができた。今回の研究の成果は、まず R の作る複素力学系ようすが C^* -環上のゲージ作用に関するKMS状態から復元できるということである。また、記号力学系と複素力学系の類似を研究した。マルコフシフトのような記号力学系を有限グラフで表現したときに、複素力学系の分岐点と有限グラフの吸い込み口が対応していることがわかった。次に分岐点のような特異点の構造を R から生成された C^* -環上の K 理論やゲージ作用の平衡状態(KMS状態)の言葉で表現することを考えた。複素力学系の分岐点の後方軌道構造の個数が、 R から生成された C^* -環上のゲージ作用の平衡状態(KMS状態)の情報から復元できた。また、有理関数 R の作る複素力学系がリーマン球面上で生成する C^* -環のゲージ作用の平衡状態の端点は分岐点でパラメーター化できるが、類似を考えて考察することで、マルコフシフトからつくられるCuntz-Krieger環の場合はそれが吸い込み口と同様にパラメーター化できた。また記号力学系と複素力学系の類似をさらに深く探ってみる研究をおこなった。マルコフシフトのような記号力学系では次元群のような不変量が分類に重要な役割を果たしてきた。この次元群は実はマルコフシフトから作られる C^* -環のコアの K_0 群と解釈できる。その類似として複素力学系や自己相似写像から作られる C^* -環のコアの K 群と、その相対とおもわれるトレース空間を調べることが重要と思われる。

コアはゲージ作用の固定環と置いていいのでこの類似は成立している。複素力学系の場合はコアの K_0 群だけでなく、 K_1 群も出てくるので、そのような新しい現象も付き添いながら類似が成立するかを探求する研究計画をたてたが、これが複素力学系の位相共役を除いた不変量であることはわかるが、その不変量であるアーベル群の K 群を複素力学系の言葉で表すことはむずかしく、あまり研究は進んでいない。

これに比べて自己相似写像から作られる C^* -環のコアのトレース空間の構造の研究の方は進展した。まずは、モデルとなるトレース環を構成した。次に n 番目のコアと係数環のトレース空間の間の森田同値を利用して、コア全体のトレース空間の単位球の端点がこれらのモデルのトレースしかないことを示すことができた。つまり、トレース空間の単位球の端点を完全決定できた。これらは係数環の言葉でいうと、分岐点の有限軌道の上にサポートをもつ測度とハッチンソン測度に対応しているものであることがわかった。

ジュリア集合に表れる自己相似性は幾何学的なものなのできれいに視覚化して納得できるものである。しかし作用素環における自己相似性は射影で切った部分が全体と同型になるという自己相似性であるので、類比的ではあるが、目に見えるものではない。Murrayとvon Neumann は II_1 型因子環に対し「基本群」を導入した。私たちは一意なトレースを持つ単純な C^* -環に対して「基本群」の概念を導入していた。有理関数 R の作る複素力学系がジュリア集合 J_R 上で生成する C^* -環のコアは R が双曲的ならば、 C^* -環の基本群と、ジュリア集合に表れる自己相似性との関係がわかった。

さらに、テント写像の場合に作られる C^* -環のコアの K 群を帰納的極限で書くための埋め込みの行列を決定した。同様なことをシェルピンスキーギャスケットの場合にも試みて、コアの K 群を帰納的極限で書くための埋め込みの行列を決定した。これは表現がさらに複雑になった。また次元群の準同型写像を調べた。すると、記号力学系のとときと違い次元群の同型写像は準同型写像にしかならず、テント写像の場合は、実際にontoになっていないことがわかった。さらにコアのトレースの構造やイデアルの構造についても継続して研究した。マルコフシフトから作られる C^* -環の場合はマルコフシフトに付随する無限パスの作る空間上の連続関数環が全体のCuntz-Krieger環の極大可換環になっていた。今年度は複素力学系と自己相似写像から生成される C^* -環の場合にも、ジュリア集合や自己相似集合上の連続関数環が全体の C^* -環の中でやはり、極大可換環になっていることがわかった。証明は非常に技術的であった。

テント写像の時は次元群が無限生成の可換自由群になり、その上の標準的な自己準同型写像は片側シフトになることがわかった。いい

かえると次元群は整数環上の多項式環のつくるアーベル群でその上の標準的な自己準同型写像は不定元 x をかける作用として実現できるということである。その計算は複雑であり、今まで研究してきたコアのトレースの端点の決定やイデアルの分類が非常に効いている。また、有限コアの行列表現とそれによる直和因子の具体的表示が大変役にたった。いままでのところ、具体的な次元群の計算に成功したのはこのテント写像の場合だけであるが、シェルピンスキー ギャスケットのような場合にも同様の計算を推し進めていきたい。マルコフシフトの場合は次元群上の自己同型になったが一般に自己相似写像系の場合にはそうでなかった。

新しい研究テーマも浮かんできた。テント写像の直積を考えて分岐が有限集合の点ではなくなる場合の研究も始めることになった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

[1]T. Kajiwara and Y. Watatani, Maximal abelian subalgebras of C^* -algebras associated with complex dynamical systems and self-similar maps, *J. Math. Anal. Appl.* 455 (2017), 1383-1400, 査読あり.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.06.044.

[2]H. Kosaki, Parallel sum of unbounded positive operators, *Kyushu J. Math.* 71 (2017), 387-405, 査読あり.

[3]T. Kajiwara and Y. Watatani, Ideals of the core of C^* -algebras associated with self-similar maps, *J. Operator Theory* 75(2016), 225-255, 査読あり.

DOI: 10.7900/jot.2015feb23.2069.

[4]Y. Watatani, Quivers, operators on Hilbert spaces and operator algebras, *Proc. 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory* (2016), 140-145, 査読なし.

[5]H. Kosaki, A certain generalization of the Heinz inequality for positive operators, *Internat. J. Math.* 27 (2016), 1650008, 17pp, 査読あり.

[6]Y. Ueda, Discrete cores of type III free product factors, *Amer. J. Math.* 138 (2016), 367-394, 査読あり.

DOI: 10.1353/ajm.2016.0013.

[7]M. Enomoto and Y. Watatani, Strongly irreducible operators and indecomposable representations of quivers on infinite

dimensional Hilbert spaces, *Integral Equations Operator Theory*, 83 (2015), 563-587, 査読あり.

DOI: 10.1007/s00020-015-2228-3.

[8]T. Kajiwara and Y. Watatani, C^* -algebras associated with complex dynamical systems and backward orbit structure, *Complex Anal. Oper. Theory* 8 (2014), 243-254, 査読あり.

DOI: 10.1007/s11785-013-0293-7.

[9]T. Kajiwara and Y. Watatani, Traces on cores of C^* -algebras associated with self-similar maps, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* 34 (2014), 1964-1989, 査読あり.

DOI: 10.7900/jot.2015feb23.2069.

[10] S. Ino and Y. Watatani, Perturbations of intermediate C^* -subalgebras for simple C^* -algebras, 査読あり,

DOI: 10.1112/blms/bdu001

Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014), 469-480.

[11]H. Kosaki, Strong monotonicity for various means, *J. Funct. Anal.* 267 (2014), 1917-1958, 査読あり.

[12]K. Matsumoto and H. Matsui, Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras, *Kyoto J. Math.* 54 (2014), 863-877, 査読あり.

[13]T. Kajiwara and Y. Watatani, KMS states on finite graph C^* -algebras, *Kyushu J. Math.* 67 (2013), 83-104, 査読あり.

DOI: 10.2206/kyushujm.67.83.

[14]F. Hiai, H. Kosaki, D. Petz and M. Ruskai, Families of completely positive maps associated with monotone metrics, *Linear algebra appl.* 439 (2013), 1749-1791, 査読あり.

[15]H. Kosaki, Trace Jensen inequality for self-adjoint operators in semi-finite von Neumann algebras, *Internat. J. Math.* 24 (2013), 1350075, 15pp, 査読あり.

[16]T. Matsui, Boundedness of entanglement entropy and split property of quantum spin chains, *Rev. Math. Phys.* 25 (2013), 1350017, 31pp, 査読あり.

DOI: 10.1142/S0129055X13500177.

[17]T. Masuda, Unified approach to the classification of actions of discrete amenable groups on injective factors, *J. Reine Angew. Math.* 683 (2013), 1-47, 査読あり.

DOI: 10.1515/crelle-2011-0011.

[学会発表](計 16 件以上)

- [1] Y. Watatani, Universal models of Hilbert representations of quivers, Workshop on Harmonic Analysis in Nara 2017, 奈良女子大学, 2017年3月.
- [2] Y. Watatani, Hilbert representations of quivers, 関数空間の構造とその周辺, 京大数理研, 2017年2月.
- [3] Y. Watatani, C*-algebras associated with complex dynamical systems and their invariants, KK-theory and dynamics, the University of Melbourne, Australia, July 2016.
- [4] Y. Watatani, Quivers, operators and path algebras, 作用素論作用素環論研究集会, 妙高, 2015年10月.
- [5] Y. Watatani, Quivers, operators on Hilbert spaces and operator algebras, 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Nagoya University, September, 2015.
- [6] Y. Watatani, Singularities in operator algebras, 日本数学会年会特別講演, 学習院大学, 2014年3月.

その他 春と秋の日本数学会において毎回講演しているのが合わせて10回以上。

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

綿谷 安男 (Watatani, Yasuo)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号：00175077

(2) 研究分担者

幸崎 秀樹 (Kosaki, Hideki)
九州大学・数理学研究院・学術研究者
研究者番号：20186612

(3) 連携研究者

松井 卓 (Matsui, Taku)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号：50199733

植田 好道 (Ueda, Yoshimichi)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00314724

増田 俊彦 (Masuda, Toshihiko)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：60314978

梶原 毅 (Kajiwar, Tsuyoshi)
岡山大学・環境学研究科・教授
研究者番号：50169447

松本 健吾 (Matsumoto, Kengo)
上越教育大学・学校教育研究科・教授
研究者番号：40241864