

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25287058

研究課題名(和文) エンタングルメント・エントロピーを用いたAdS/CFT対応の解析

研究課題名(英文) Studies of AdS/CFT via Entanglement Entropy

研究代表者

高柳 匡 (Takayanagi, Tadashi)

京都大学・基礎物理学研究所・教授

研究者番号：10432353

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,700,000円

研究成果の概要(和文)：ミクロな物理法則を説明する量子論に特有の性質である「量子エンタングルメント」の強さを表す量がエンタングルメント・エントロピーである。ゲージ重力対応(AdS/CFT対応)を用いると、このエンタングルメント・エントロピーが、重力理論の時空の面積として計算できる。このことから、重力理論の時空は量子エンタングルメントの集合体と解釈できることが予想される。この対応を詳しく調べるために、量子系(共形場理論)の励起状態のエンタングルメント・エントロピーを多くの例で計算し、アインシュタイン方程式をはじめとして重力理論のダイナミクスがエンタングルメント・エントロピーのダイナミクスと等価であることを見出した。

研究成果の概要(英文)：Entanglement entropy measures the amount of quantum entanglement, which is a fundamental property of quantum theory. The gauge/gravity correspondence (AdS/CFT correspondence) tells us that the entanglement entropy is computed as an area of gravitational spacetime. This strongly suggests that a spacetime in a gravitational theory can be interpreted as a collection of bits of quantum entanglement. To study this correspondence, we computed the entanglement entropy for excited state in many examples of quantum systems (especially conformal field theories) by generalizing the replica method. We showed that the dynamics of entanglement entropy is equivalent to that of gravitational theories including Einstein equation.

研究分野：超弦理論

キーワード：ゲージ重力対応 超弦理論 量子エンタングルメント 共形場理論

## 1. 研究開始当初の背景

ミクロな世界を支配する物理法則は量子論と呼ばれているが、マクロな世界(古典論)には存在しない性質の中で最も重要なものは「量子エンタングルメント」である。一言でいうと、系全体(例えばある金属)の状態を指定したとしても、その一部の系の状態に不定性(量子揺らぎ)が生じる、という現象である。この不定性の度合いを測る量が「エンタングルメント・エントロピー」である。興味深いことにこのエントロピーの大きさは、その系にエネルギーを与えたときにどの程度活発に励起されるかという、いわゆる自由度を見積もる量となっていることが最近の研究で分かってきた。

このようにエンタングルメント・エントロピーは量子的物質の自由度を測る基礎的な量であるので、物性物理の分野でも注目を浴びている。さらに、研究代表者らが2006年に量子臨界点に相当する物質のエンタングルメント・エントロピーがゲージ重力対応を用いて幾何学的に計算できることを発見したことによって、超弦理論の分野においても研究が開始され、ここ数年では世界中で大変ホットな分野に成長している。

## 2. 研究の目的

本科研費の研究の大きな目的は、重力理論のダイナミクスを量子エンタングルメントのダイナミクスとして理解することである。この新しい見方を発展させると、未だ解明されていないミクロな重力理論(量子重力理論とよばれる)を理解する端緒が得られることが期待されるからである。

ゲージ重力対応は、重力の理論が、実は重力を含まないある種の理論(電磁気学を一般化したような理論で、ゲージ理論と呼ばれる)と等価になるという驚くべき現象であり、多大な検証に成功しているにも関わらず、本質的な証明はなされていない。重力の理論は一般相対性理論によって記述される時空の曲がり具合を基礎として幾何学的な理論である。ゲージ重力対応を用いると重力理論の時空の(極小)面積が、実はゲージ理論のエンタングルメント・エントロピーと一致することが分かる。この事実を用いると重力理論の時空のダイナミクスが、エンタングルメント・エントロピーのダイナミクスと解釈できることが予想される。この予想を定量的に理解し、逆にその事実からゲージ重力対応という現象が何故起こるのか理解を深めたい。例えばアインシュタイン方程式が量子エンタングルメントの立場でどのように解釈されるか理解したい。

## 3. 研究の方法

ゲージ重力対応における量子エンタングルメントのダイナミカルな側面を調べるために、次の(1)(2)(3)の3つの手法を本研究では主に用いていた。

### (1) 共形場理論の励起状態の解析

ゲージ重力対応の最も基本的な具体例はAdS/CFT対応と呼ばれていて、反ドジッター時空(AdS)における重力理論と(ゲージ理論の中で特に)共形場理論(CFT)が等価に対応するというものである。共形場理論は、平たく言うと質量がゼロの粒子の理論と言え、長さのスケールが理論のパラメータとして入っていない理論である。

この共形場理論の基底状態のエンタングルメント・エントロピーの性質はこれまでの研究でよくわかってきているが、本研究ではダイナミクスを理解したいので、励起状態を解析する必要がある。そこでレプリカ法というエンタングルメント・エントロピーの標準的な計算法を励起状態に拡張する必要がある。その後で様々な近似法や、厳密に解けるモデルなどで、エントロピーを評価する。

### (2) 重力理論における計算

ゲージ重力対応において、ゲージ理論(特に共形場理論)の励起状態は、重力理論の時空の励起に相当する。小さな励起の場合は重力波が重なった時空とすることができる。大きな励起の場合はアインシュタイン方程式の非線形の効果が重要になる。しかし、自由落下する重い粒子のように具体的に非線形なレベルでも厳密解を知っている例もあるので活用できる。

### (3) テンソルネットワーク

テンソルネットワークとは、もともと複雑で厳密に解けない量子多体系の基底状態を数値的に変分法で求める際に強力な図形的手法である。量子力学の変分法では最初に波動関数の試行関数の形を仮定する必要がある。テンソルネットワークはその波動関数を図示して表現する手法である。この構造を調べると実は、テンソルネットワークは量子エンタングルメントの構造を表していることが分かってきた。さらに最近、ゲージ重力対応における重力理論の時空が実は量子臨界点の量子系のテンソルネットワークとみなせることが指摘された。このアイデアを用いると重力理論のダイナミクスをエンタングルメントのダイナミクスと関連づけることが可能である。

しかしながら、具体的に共形場理論の計算を行うには離散的なネットワークではなく、場の理論の連続極限を取る必要がある。そこ

で連続エンタングルメント繰り込みの手法を適用することで、この問題を解決する。

#### 4. 研究成果

本研究における成果は大きく分けて主に以下の (A) (B) (C) (D) の4つに分かれる。これらの成果は国際的にも注目を集め、本研究が行われた3年間に研究代表者は30回以上国際会議に招待され講演を行った。

##### (A) 小さな励起状態のエンタングルメント・エントロピーとアインシュタイン方程式

ゲージ重力対応において、小さな励起状態を時空の計量の摂動として扱い、線形化されたアインシュタイン方程式を満たす解に対して、エンタングルメント・エントロピーの計算を行った。さらにその結果を注意深く解析することで、エンタングルメント・エントロピーがどのような方程式に従うのか調べたところ、2階の双曲型偏微分方程式を得た。この方程式のポテンシャル項が、重力理論の宇宙定数となっていることも示した。この方程式を量子エンタングルメントの分布に関する束縛条件として解釈できることを見出した。さらに特別な極限で、エンタングルメント・エントロピーの第一法則として解釈できることを指摘した (論文①)。

この結果を応用して、その後 Raamsdonk 氏らは、線形化されたアインシュタイン方程式は、エンタングルメント・エントロピーの第一法則と等価であることを発見し、この業界の大きな話題の一つとなった。

##### (B) 局所的励起状態のエンタングルメント・エントロピーの解析

前述のように小さな励起状態についてはエンタングルメント・エントロピーの第一法則を用いて普遍的に理解できる。しかし大きな励起状態については普遍的法則は存在せず、個別の例を解析していくほかないと思われる。特にシンプルで非自明な例として、共形場理論のプライマリー演算子を真空に作用して生成した局所的な励起状態を考え、そのエンタングルメント・エントロピーを計算した。

まずレプリカ法に基づき時間発展も求められる一般的なエントロピー計算法を開発した。さらに相互作用がゼロの共形場理論で具体的にその手法で計算を行った (論文③、Physical Review Letter 誌に掲載)。その結果、エンタングルメント・エントロピーは時間発展で一定量増加し、その増加量は粒子描像で定量的に理解できることを見出した。ミニマル模型のような厳密に解ける共形場理論でも同様な結果が得られることも示した。

しかしながら、ゲージ重力対応が成り立つような相互作用がとても強い共形場理論では、振る舞いが大きく異なることを発見した。具体的にエンタングルメント・エントロピーの時間発展をゲージ重力対応を用いて評価すると、増加量は一定値に近づくのではなく、対数的に ( $\log(t)$ ) 常に増加することが分かった。この結果は、相互作用が強いのでどのセクターも同じように励起されるというカオス的な描像を強く示唆する。

このように量子系のダイナミクスがカオス的などかを判定するためにエンタングルメント・エントロピーの時間発展が本質的な役割果たすことを初めて見出したのである。

##### (C) Surface/State 対応とテンソルネットワーク

ゲージ重力対応は、重力理論がその時空の境界に仮想的に存在するゲージ理論と等価であることを主張する。

テンソルネットワークに記述を注意深く考察すると、重力理論の時空の任意の (凸な) 閉曲面に対して、ゲージ理論の量子状態が一つ対応するというゲージ重力対応をより一般化した対応関係が得られる。この事実を研究代表者らは初めて見出し、Surface/State 対応と名付けた。

この Surface/State 対応を励起状態に応用すると、重力理論の時空の一点を励起することを、共形場理論の境界状態と呼ばれる状態を少し変形して得られる比較的美しい代数構造を持った状態として表現できることを見出した (論文⑤、Physical Review Letter 誌に掲載)。実際にその状態を用いて、正しい2点関数を再現した。この成果はゲージ重力対応の局所性の理解に貢献できると期待される。

##### (D) 量子情報計量とゲージ重力対応

量子エンタングルメントとは独立な量であるが、量子情報の定量化として重要な量が量子情報計量である。これは二つの異なる状態間の距離をその内積が1からどの程度ずれているのかで見積もる手法である。

本研究では、場の理論における量子情報計量を初めて導入し、共形場理論における様々な計算を行った。その結果、体積に比例した発散項が生じることを見出した。

さらにゲージ重力対応を用いて、この量が重力理論の立場ではどのような量として計算できるのか解析した。その結果、量子情報計量は、重力理論の時空の時間一定面の体積として近似的に計算できることを見出した、(論文⑥、Physical Review Letter 誌に掲載)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

① M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi,  
“Holographic Local Quenches and Entanglement Density,”  
JHEP 1305 (2013) 080;  
doi:10.1007/JHEP05(2013)080 (査読あり)

② M. Nozaki, T. Numasawa, A. Prudenziati and T. Takayanagi,  
“Dynamics of Entanglement Entropy from Einstein Equation,”  
Phys. Rev. D 88 (2013) no. 2, 026012;  
doi:10.1103/PhysRevD.88.026012  
doi:10.1103/PhysRevD.88.026012  
(査読あり)

③ M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi,  
“Quantum Entanglement of Local Operators in Conformal Field Theories,”  
Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 111602;  
doi:10.1103/PhysRevLett.112.111602  
(査読あり)

④ P. Caputa, M. Nozaki and T. Takayanagi,  
“Entanglement of local operators in large- $N$  conformal field theories,”  
PTEP 2014 (2014) 093B06  
doi:10.1093/ptep/ptu122 (査読あり)

⑤ M. Miyaji, T. Numasawa, N. Shiba, T. Takayanagi and K. Watanabe,  
“Continuous Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz as Holographic Surface-State Correspondence,”  
Phys. Rev. Lett. 115 (2015) no. 17, 171602;  
doi:10.1103/PhysRevLett.115.171602  
(査読あり)

⑥ M. Miyaji, T. Numasawa, N. Shiba, T. Takayanagi and K. Watanabe,  
“Distance between Quantum States and Gauge-Gravity Duality,”  
Phys. Rev. Lett. 115 (2015) no. 26, 261602 ;  
doi:10.1103/PhysRevLett.115.261602  
(査読あり)

[学会発表] (計 32 件)

① T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy of Excited States,”  
Strings 2013, Sogang University, Seoul,

韓国, 6月23日—29日, 2013年.

② T. Takayanagi, “Entanglement Entropy and Gravity/Condensed Matter Correspondence,” Plenary Lecture at The 20th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR20), Uniwersytet Warszawski, Warsaw, ポーランド, 7月7日—13日, 2013年.

③ T. Takayanagi, “Surface/State Correspondence as a Generalized Holography,” KITP conference: Closing the entanglement gap: Quantum information, quantum matter, and quantum fields, KITP, UCSB, Santa Barbara, 米国, 6月1日—5日, 2015年.

[図書] (計 1 件)

高柳匡著

「ホログラフィー原理と量子エンタングルメント」臨時別冊・数理科学 2014 年 4 月  
SGC ライブラリ 106 サイエンス社

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ:

<http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tadas-hi.takayanagi/research2.html>

高柳匡の一般講演(1):

国立大学共同利用・共同研究拠点セミナーシリーズ「知の拠点セミナー」にて

「超ひも理論のフロンティア: ブラックホールからホログラフィー原理へ」と題し講演(2014年7月18日)

高柳匡の一般講演(2):  
西宮湯川記念科学セミナーにて「超ひも理論の最前線：ブラックホールからホログラフィー原理へ」と題して講演。(2014年12月6日)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高柳 匡 (TAKAYANAGI TADASHI)  
京都大学・基礎物理学研究所・教授  
研究者番号：10432353

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

研究協力者

笠 真生 (RYU Shinsei)  
イリノイ大学アーバナシャンペーン校  
助教授

芝 暢郎 (SHIBA Noburo)  
日本学術振興会特別研究員(PD)