

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25330009

研究課題名(和文) 最大および極大クリーク抽出アルゴリズムの高効率化と応用

研究課題名(英文) Much faster algorithms for finding maximum and maximal cliques and their applications

研究代表者

富田 悦次 (TOMITA, Etsuji)

電気通信大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：40016598

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：最大クリーク抽出のための分枝限定アルゴリズムに対し、近似最大クリーク抽出アルゴリズムを効果的に組合せ、さらに節点整列と近似彩色を適切に適用することにより、実働上一層の高効率化を達成した。また理論的には、最大クリーク問題が多項式時間的高速に可解となる、よりゆるやかな条件およびアルゴリズムを与えた。

極大クリーク全列挙アルゴリズムについては、それを疑似極大クリーク的全列挙までを扱えるように拡張し、ネットワーク解析への応用に対して有効性が確認された。

研究成果の概要(英文)：We have developed much faster algorithms for finding a maximum clique. These have been accomplished by introducing a near-maximum clique finding algorithm and by applying appropriately sorting and coloring vertices to the underlying branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique. The effectiveness of the above algorithms has been confirmed by extensive computational experiments. In addition, we have also given a weaker condition under that the maximum clique problem can be solved in polynomial time in theory.

Our previous algorithm for enumerating maximal cliques has been extended to have algorithms for enumerating maximal pseudo-cliques. They are confirmed to work effectively for the analysis of networks.

研究分野：計算機科学

キーワード：最大クリーク 極大クリーク NP完全問題 時間計算量 分枝限定法 近似解法 多項式時間的可解性  
疑似クリーク

## 1. 研究開始当初の背景

最大クリーク問題は典型的な NP 完全で難しい問題である。しかし、同問題は、符号理論、画像処理、クラスタリング、バイオインフォマティクス、無線ネットワークの周波数割当て、等々多くの問題解決に有効であることが分かってくる。特に近年は非常に活発な研究が進められており、大規模な問題にも適用可能なように、益々高速なアルゴリズムが強く求められている。さらに、極大クリーク全列挙問題はより多くの問題に適用可能であり、極大クリークを  $O(3^{n/3})$ -時間で全列挙する最適時間アルゴリズム CLIQUES

([TTT06] Tomita et al., Theoretical Computer Science, 2006) により一つの区切りが付けられていたが、疑似クリークへの展開等々、更なる活発な研究が続けられている。

## 2. 研究の目的

最大クリーク抽出アルゴリズムおよび極大クリーク全列挙アルゴリズムの、より効率化、一般化を達成し、応用問題への効果的適用を確認する

## 3. 研究の方法

まず、最大クリーク抽出のためにこれまで開発してきたアルゴリズムの実働上挙動を徹底的に調べ上げ、その結果に基づいてステップバイステップに更なる高速化を達成する。なお、最大クリーク問題は NP 完全であり一般的に多項式時間的高速に解を求めることはほぼ不可能であると認識されている。そこで、どのような自然な条件下ならば同問題が多項式時間的に可解となるかをアルゴリズムと共に明らかにし、その定量的性能を極力上げる。

極大クリーク全列挙アルゴリズムに関しては、それを基本として、より一般化した問題である疑似クリーク全列挙に展開し、その性能を評価すると共に実問題への応用の有効性を確認する。

## 4. 研究成果

### (1) 最大クリーク抽出アルゴリズムの高速化

最大クリークを効率よく抽出するアルゴリズムとして、近似彩色による非常に効果的な分枝限定を伴った深さ優先探索アルゴリズム MCS をこれまでの研究において提唱してきた。本研究ではそれを更に高速化するため、先ずアルゴリズム MCS の各構成要素部分の

寄与について分析評価を行い、その性能を詳細に明らかとした。

その上で、更なる効率化のために以下の改良を行った。

#### ① 最大クリーク近似解の導入

アルゴリズム MCS を最初に提唱した時には、初段階において最大クリークの近似解を用い、その有効性を確認していた。

ここでは独自に考案した近似アルゴリズム `init-lb` を用いていたが、その他の最新近似アルゴリズムも巾広く調査をした結果、局所探索アルゴリズム KLS (Katayama et al., Information Processing Letters, 2005) がより有効であることを確認でき、近似解を求めるためのオーバーヘッドと近似解による探索領域削減効果とのトレードオフを適切に設定することにより、近似解導入による効果を顕著なものとした。(アルゴリズム MCS<sub>1</sub>)

#### ② 節点探索順序の適切化

節点探索において、その順序をどのようにするかは重要な問題である。一般には節点次数が小さい方から探索を進めることが探索領域縮小に有効であることが分かっているが、節点整列を行うためにはオーバーヘッドもかかるため、整列の適用の仕方が重要となる。このため、本研究においては探索の初期段階における根本部分だけにおいて適切に節点整列を行うこととして、その有効性実現を達成した。(アルゴリズム MCS<sub>2</sub>)

#### ③ 探索末端部分における彩色の軽量化

前記と異なり、探索の末端部分においては彩色による分枝限定効果に対してそのためのオーバーヘッドの比重が大きくなる。そのため、探索の末端部分における彩色についてはその軽量化を行い、分枝限定が弱まってもそれ以上に彩色オーバーヘッドの減少効果の方が大きくなるようにし、結果として総合的に実行時間短縮を実現した。

以上の①、②、③をアルゴリズム MCS に組込むことにより、MCS よりも効率的なアルゴリズム MCT を得た。具体的実行例の一部を、表 1(実行時間比較)、表 2(探索領域比較)に示す。

近似解抽出のための局所探索アルゴリズム KLS については、これを概念的には並列化して更に解精度を上げた近似アルゴリズム KLS5 も構築し、それにより MCT よりも更に効率的な最大クリーク抽出アルゴリズム `k5_MCT` も得た。

### (2) 最大クリーク問題を多項式時間的に可解とする条件とアルゴリズム

NP 完全な最大クリーク問題に対し、出来る限り一般的で緩やかな条件付けを行うことにより同問題が多項式時間的可解となる条件およびそのアルゴリズムが重要となる。このための条件として、節点の最大次数が節点数の対数オーダーで押さえられていればよいとの結果をこれまでに得てきている。本研究においては、定量的に次の結果と具体的なアルゴリズムを得た：

節点数  $n$  のグラフにおいて、

最大次数  $\Delta \leq 3.177d \lg n$  ( $d$  は定数) であるならば、そのグラフ中の最大クリークは  $n^{1+d}$  なる多項式時間で抽出できる。

この条件とアルゴリズムは、極大クリークを  $O(3^{n/3})$ -時間で全列挙する最適時間アルゴリズム CLIQUES ([TTT06]) に対して逐次分枝限定を強化することにより得ている。

この分枝限定を更に強化することにより、より強い結果を得ることが出来るが、アルゴリズムと解析は複雑となる。

表 1 実行時間 [sec]

Graph				KLS		MCS	MCS <sub>1</sub>	MCS <sub>2</sub>	MCT
Name	$n$	$dens$	$\omega$	$sol.$	$time$				
brock400_1	400	0.75	27	25	0.08	288	256	182	116
brock800_4	800	0.65	26	20	0.22	1,768	1,751	1,256	819
C250.9	250	0.9	44	44	0.08	1,171	926	774	404
gen400_p0.9_55	400	0.9	55	53	0.25	22,536	1,651	1,970	167
gen400_p0.9_65	400	0.9	65	65	0.26	57,385	7.73	6.07	0.74
gen400_p0.9_75	400	0.9	75	75	0.28	108,298	1.38	1.38	0.33
p_hat700-3	700	0.75	62	62	0.46	900	456	438	216
p_hat1000-2	1000	0.49	46	46	0.23	85	47	46	29
p_hat1500-2	1500	0.51	65	65	0.73	6,299	2,964	2,832	1,560
san400_0.7_1	400	0.7	40	40	0.06	0.26	0.06	0.06	0.06
frb-30-15-2	450	0.8	30	30	0.15	1,048	691	773	116

表 2 分枝数  $\times 10^{-6}$

Graph				KLS		MCS	MCS <sub>1</sub>	MCS <sub>2</sub>	MCT
Name	$n$	$dens$	$\omega$	$sol.$	$time$				
brock400_1	400	0.75	27	25	0.08	89	77	52	55
brock800_4	800	0.65	26	20	0.22	381	380	258	270
C250.9	250	0.9	44	44	0.08	255	197	154	186
gen400_p0.9_55	400	0.9	55	53	0.25	2,895	181	210	61
gen400_p0.9_65	400	0.9	65	65	0.26	7,628	0.33	0.34	0.13
gen400_p0.9_75	400	0.9	75	75	0.28	17,153	0.05	0.05	0.02
p_hat700-3	700	0.75	62	62	0.46	88	43	40	54
p_hat1000-2	1000	0.49	46	46	0.23	13	6.6	6.3	10
p_hat1500-2	1500	0.51	65	65	0.73	560	253	234	400
san400_0.7_1	400	0.7	40	40	0.06	22,771	200	0	0
frb-30-15-2	450	0.8	30	30	0.15	229	135	148	61

(3) 極大クリーク全列挙アルゴリズムの一般化と応用

グラフ中の極大クリークは最適時間アルゴリズム CLIQUES ([TTT06]) により高速に列挙することが出来、その有効性が確認されている。しかし、実応用においては厳密にクリークとの条件はしばしば強過ぎ、それを緩和した疑似クリークへの一般化が望まれることも多い。そこで、疑似クリークの中でも特に  $k$ -plex に注目してその効率的列挙を考えた。ここで、 $k=1$  の場合の 1-plex は完全なクリークと一致し、一般に  $k$ -plex においてはクリークの場合に対し、各節点から  $k$  個の非隣接点の存在を許す。従って、 $k$ -plex はクリークの極く自然な一般化となっており、その列挙アルゴリズムも極大クリーク全列挙アルゴリズムの自然な一般化として実現できる。特にここでは、 $k$ -plex がより有意義な場合に限定されて効率的となるように更に適切な条件付けがなされている。

このために  $k$ -plex の列挙は非常に効率的となり、ネットワーク解析への応用に対してその有効性が確認されている。

(4) その他

上記に関連して、5. 主な発表論文等に記載した様に、学習アルゴリズムについての有効な基礎的研究成果も得た。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① Etsuji Tomita, Sora Matsuzaki, Atsuki Nagao, Hiro Ito, Mitsuo Wakatsuki: “A much faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique with computational experiments,” *Journal of Information Processing*, 25, pp.667-677, 査読有 (2017)  
DOI:10.2197/ipsjip.25.667
- ② Etsuji Tomita: “Efficient algorithms for finding maximum and maximal cliques and their applications - Keynote -,” *WALCOM 2017, Lecture Notes in Computer Science*, 10167, pp.3-15, 招待論文, 査読無 (2017)  
DOI: 10.1007/978-3-319-53925-6\_1
- ③ Etsuji Tomita, Kohei Yoshida, Takuro Hatta, Atsuki Nagao, Hiro Ito, Mitsuo

Wakatsuki: “A much faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique,” *FAW 2016, Lecture Notes in Computer Science*, 9711, pp.215-226, 査読有 (2016)

DOI:10.1007/978-3-319-31753-3\_34

- ④ Hongjie Zhai, Makoto Haraguchi, Yoshiaki Okubo, Etsuji Tomita: “A fast and complete algorithm for enumerating pseudo-cliques in large graphs,” *International Journal of Data Science and Analytics*, Springer, pp.145-158, 査読有 (2016)  
DOI:10.1007/s41060-016-0022\_1
- ⑤ Yoshiaki Okubo, Makoto Haraguchi, Etsuji Tomita: “Enumerating maximal isolated cliques based on vertex-dependent connection lower bound,” *MLDM 2016, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 9727, pp.569-583, 査読有 (2016)  
DOI:10.1007/978-3-319-41920-6\_45
- ⑥ Hongjie Zhai, Makoto Haraguchi, Yoshiaki Okubo, Etsuji Tomita: “A fast and complete enumeration of pseudo-cliques for large graphs,” *PAKDD 2016, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 9651, pp.423-435, 査読有 (2016)  
DOI:10.1007/978-3-319-31753-3\_34
- ⑦ Sohel Rahman, Etsuji Tomita (Eds.), “Special issue on WALCOM 2015,” *Journal of Discrete Algorithms*, 36, Elsevier, 査読無 (2016)
- ⑧ Sohel Rahman, Etsuji Tomita (Eds.), “Special issue on WALCOM 2015,” *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 20, 査読無 (2016)
- ⑨ Hongjie Zhai, Makoto Haraguchi, Yoshiaki Okubo, Etsuji Tomita: “Enumerating maximal clique sets with pseudo-clique constraint,” *DS 2015, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 9356, pp.324-339, 査読有 (2015)  
DOI:10.1007/978-3-319-24282-8\_28
- ⑩ Mitsuo Wakatsuki, Etsuji Tomita, Tetsuro Nishino: “A polynomial-time algorithm for checking the equivalence for deterministic restricted one-counter transducers which accept by final state,” *Software Engineering, Artificial*

Intelligence, Networking and Parallel/  
Distributed Computing Studies in  
Computational Intelligence, 569, pp.  
131-144, Springer, 査読有 (2015)

- ⑪ Sohel Rahman, Etsuji Tomita (Eds.):  
“WALCOM: Algorithms and  
Computation,” WALCOM 2015, Lecture  
Notes in Computer Science, 8973, 査読  
無 (2015)
- ⑫ 中西裕陽, 富田悦次, 若月光夫, 西野哲朗:  
“最大クリーク問題の多項式時間的  
可解性の拡張の改良,” 電子情報通  
信学会論文誌 D, J97-D, pp.1106-1121, 査読有 (2014)
- ⑬ Etsuji Tomita, Yoichi Sutani, Takanori  
Higashi, Mitsuo Wakatsuki: “A simple  
and faster branch-and-bound algorithm  
for finding a maximum clique with  
computational experiments,” IEICE  
Trans. on Information and Systems,  
E96-D, pp.1286-1298, 査読有 (2013)  
DOI:10.1587/transinf.E96.D.1286
- ⑭ Yoshiaki Okubo, Makoto Haraguchi,  
Etsuji Tomita, “Relational change  
pattern mining based on modularity  
difference,” MIWAI 2013, Lecture Notes  
in Artificial Intelligence, 8271, pp.187-  
198, 査読有 (2013)  
DOI:10.1007/978-3-642-44949-9
- ⑮ Mitsuo Wakatsuki, Etsuji Tomita,  
Tetsuro Nishino: “A polynomial-time  
algorithm for checking the equivalence  
for real-time deterministic restricted  
one-counter transducers which accept by  
final state,” International Journal of  
Computer and Information Science, 14,  
pp. 45-53, 査読有 (2013)

[学会発表] (計 15 件)

- ① 富田悦次: “効率的な最大および極大ク  
リーク抽出アルゴリズムとその応用,” 電子  
情報通信学会中国支部学術講演会 (招待  
講演), 2018 年 3 月 6 日, 岡山理科大学.
- ② Etsuji Tomita: “Efficient algorithms  
for finding maximum and maximal  
cliques,” 北海道大学大学院情報科学研  
究科情報理工学専攻講演会 (招待講演),  
2017 年 6 月 5 日, 北海道大学.
- ③ 吉田幸平, 八田拓郎, 富田悦次, 長尾篤樹,  
伊藤大雄, 若月光夫: “最大クリーク抽出アル  
ゴリズム MCS の高速化,” 情報処理学会研究  
報告, 2016-AL-157, No.8, pp.1-8, 2016 年  
3 月 6 日, 電気通信大学.

- ④ 若月光夫, 富田悦次, 西野哲朗: “最終状態  
受理式決定性限定 1 カウンタ変換器の多項式  
時間包含性判定アルゴリズム,” 冬の LA シン  
ポジウム, pp.14:1-14:8, 2016 年 1 月 26 日-  
28 日, 京都大学.
- ⑤ 趙奇, 原口誠, 大久保好章, 富田悦次: “可  
変接続数下限を用いた孤立性  $j$ -核,” 人工知  
能学会人工知能基本問題研究会, pp. 49-  
54, 2016 年 1 月 21 日-22 日, 作並温泉 湯の原  
温泉.
- ⑥ 大久保好章, ジェイ泓杰, 原口誠, 富田悦  
次: “大規模グラフにおける疑似クリーク厳密解  
全列挙に関する考察,” 情報処理学会数理モ  
デル化と問題解決研究会, 2015-MPS-106,  
No.6, pp. 1-6, 2015 年 12 月 15 日, 電気通信  
大学.
- ⑦ 八田拓郎, 富田悦次, 伊藤大雄, 若月光夫:  
“最大クリーク抽出アルゴリズムの高速化,” 夏  
の LA シンポジウム, pp.9:1-9:8, 2015 年 7  
月 14 日-16 日, 加賀温泉 ゆのくに天祥.
- ⑧ Etsuji Tomita: “Efficient algorithms  
for finding maximum and maximal  
cliques,” (Invited Talk) International  
Spring School on Algorithms and  
Applications (ISSAA 2015), 2015 年 3  
月 25 日, BUET, Dhaka.
- ⑨ ジェイ泓杰, 原口誠, 大久保好章, 富田悦  
次: “疑似クリーク制約を用いたクリーク族の  
全列挙,” 人工知能学会人工知能基本問題研  
究会, pp. 56-61, 2015 年 1 月 13 日-14 日,  
名古屋工業大学.
- ⑩ ジェイ泓杰, 原口誠, 大久保好章, 富田悦次:  
“誘導グラフの次数下限制約に基づく疑似ク  
リーの列挙法,” 数理モデル化と問題解決研  
究会, 2014-MPS-100, No. 27, pp.1-5,  
2014 年 9 月 25 日-26 日, 日本科学未来館.
- ⑪ ジェイ泓杰, 原口誠, 大久保好章, 富田悦  
次: “ $j$ -核性を持つ極大疑似クリーク  
の全列挙,” 情報科学技術フォーラム (FIT 2014),  
pp.33-35, 2014 年 9 月 3 日-5 日, 筑波大学.
- ⑫ 中西裕陽, 富田悦次, 若月光夫, 西野哲朗:  
“最大クリーク問題の多項式時間的  
可解性の拡張の更なる改良,” 電子情報通  
信学会技術研究報告, COMP2014-13, pp.85-92,  
2014 年 6 月 13 日-14 日, 松山道後温泉 大和  
屋.
- ⑬ 松平将宜, 原口誠, 大久保好章, 富田悦次:  
“極大  $(j, k)$  疑似クリーク  
の全列挙に関する一考察,” 人工知能学  
会全国大会 論文集 3J3-1,  
pp.1-3, 2014 年 5 月 12-15 日, 松山 ひめぎん  
ホール.
- ⑭ 若月光夫, 富田悦次, 西野哲朗: “実時間決

定性限定1カウンタ変換器に対する質問による多項式時間学習アルゴリズム,” 冬のLAシンポジウム, pp.21:1-21:7, 2014年1月28日-30日, 京都大学.

- ⑮ 間澤直寛, ジェイ泓杰, 原口誠, 富田悦次: “疑似独立集合制約と正規化カットを用いたグラフの構造比較,” 人工知能学会全国大会論文集 2C1-2, pp.1-4, 2013年6月4日-7日, 富山国際会議場.

[図書](計 5 件)

- ① 伊藤大雄: 「データ構造とアルゴリズム」 コロナ社 (2017)
- ② Etsuji Tomita: “Clique Enumeration,” in Ming-Yang Kao (Ed.), Encyclopedia of Algorithms, 2nd Edition, pp.313-317, Springer (2016)
- ③ 西野哲朗, 岡本龍明, 三原孝志: 「量子計算」(ナチュラルコンピューティング・シリーズ), 近代科学社 (2015)
- ④ 西野哲朗, 若月光夫: 「情報工学のための離散数学入門」 数理工学社 (2015)
- ⑤ 富田悦次, 横森貴: 「オートマトン・言語理論 第2版」 森北出版 (2013)

[その他]

ホームページ等

[http://www.etlab.ice.uec.ac.jp/~tomita/index\\_j.html](http://www.etlab.ice.uec.ac.jp/~tomita/index_j.html)

本研究の成果は下記論文[TTT06], [TS03], [TK07], [TSHTW10]などを基にして直接的に発展させたものであるが, この内, [TTT06]は Theoretical Computer Science Top Cited Article 2005-2010 受賞に続き, 2015年には, TCS Top Cited Article 2006 (in TCS Top Cited Articles 1975-2014) に選出された. [TTT06]はその後も被引用件数を伸ばし, Google Scholar における2018年5月末時点の被引用件数は500件を超している. なお, 本論文の基となる国際会議論文(Tomita et al., COCOON 2004, Lecture Notes in Computer Science, 3106, pp. 161-170 (2004)) の被引用件数を合わせると, 合計550件超の被引用.

[TS03], [TK07], [TSHTW10]の Google Scholar における同時点の被引用件数合計も520件超, と広く引用を受けている. [TTT06] Etsuji Tomita, Akira Tanaka, Haruhisa Takahashi: “The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational

experiments,” Theoretical Computer Science, 363, pp.28-42 (2006)

[TS03] Etsuji Tomita, Tomokazu Seki: “An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique,” Lecture Notes in Computer Science, 2731, pp.278-289 (2003)

[TK07] Etsuji Tomita, Toshikatsu Kameda: “An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique with computational experiments,” Journal of Global Optimization, 37, pp.95-111 (2007)

[TSHTW10] Etsuji Tomita, Yoichi Sutani, Takanori Higashi, Shinya Takahashi, Mitsuo Wakatsuki: “A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique,” Lecture Notes in Computer Science, 5942, pp.191-203 (2010)

本研究に直接関連して, 研究代表者 富田悦次 は, イタリア Pisa 大学における PhD 論文審査委員を務めた (2017-2018 年). 同じく富田は, 国際会議 WALCOM 2015 の PC Co-Chair, IAC3T 2018 の Advisory Board 委員を務めている.

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

富田 悦次 (TOMITA, Etsuji)  
電気通信大学・先進アルゴリズム研究ステーション・名誉教授  
研究者番号: 40016598

### (2)研究分担者

若月 光夫 (WAKATSUKI, Mitsuo)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・助教  
研究者番号: 30251705

西野 哲朗 (NISHINO, Tetsuro)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号: 10198484

伊藤 大雄 (ITO, Hiro)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号: 50283487