様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ８ 月 １１ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５３３００２６

研究課題名（和文）グラフ構造を有する集合被覆問題に対する近似アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Approximation algorithms for set cover problems with graph structures

研究代表者
趙　亮（ZHAO, LIANG）

京都大学・総合生存学館・准教授

研究者番号：９０３４４９０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：与えられたグラフにおいて，距離k以内の節点を支配範囲と定義したときに，全節点または指定した割合の節点を支配するために必要最小限の支配点集合の計算を考える．本研究はk≧2と大規模な問題に対して，グラフの性質をによって改善可能の発想に基づき，いくつかのグラフ族に対して，従来の方法より改善した線形時間アルゴリズムを設計し，計算機実験によってその効果を確認した．また，関連するいくつかの社会問題に適用した．

研究成果の概要（英文）：Given a graph, let us define the domination area of a vertex v by the set of vertexes within distance k from v. This research considers to find a minimum set of vertexes that dominates all or specified ratio of vertexes. For a k>=2 and large scale networks, based on the idea to improve by utilizing the graph structure, this study designed some new linear-time algorithms for some classes of graphs. Empirical results show that proposed methods improve from previous studies. Finally, the algorithms are applied to some social problems as well.

研究分野：アルゴリズム

キーワード：支配集合　集合被覆　distance dominating　network algorithm

１．研究開始当初の背景

研究開始の前年度までに，代表者は，科研費の援助もあってインターネット観測問題の数理モデルを構築し効率的なアルゴリズムを研究してきた．そのモデルは，（インターネットを扱うため，）グラフ構造を持つ集合被覆問題の一つであった．

その結果，学生と一緒に開発したアルゴリズムは，線形時間でありながら，理論的保証こそないものの，実際の実験結果が（数万から１億の節点を持つグラフに対して）意外によくて，集合被覆問題を解くスタンダードな欲張り法（Greedy Algorithm）の理論近似比（O(log n)）よりだいぶよかったのである．それにはいくつかの理由が考えられるが，特にグラフ構造を持つことが一番大きいではないかと思えた．

そこで，インターネット以外のグラフで適用できる例がないか，問題そのものの拡張ができないか，また，一般的にグラフの構造を利用すると理論的に O(log n)よりよい近似比が達成できないか，などを考え，本研究の着想となった．

２．研究の目的

本研究は，グラフ構造を有する集合被覆問題に焦点を当て，グラフの性質を利用してアルゴリズムの改善を図り，複数の問題設定の導入等，多方面から集合被覆問題の本質に迫ることを目的としている．

具体的に，与えられたグラフ G において，距離 k 以内の節点を支配範囲と定義したときに，全節点または指定した割合の節点を支配するために必要最小限の支配点集合の計算を考える．k=1 の時は，古典的な支配集合問題として知られ，線形時間で近似比 log(n)の欲張り法が知られています．ただし n は節点数を表す．一方 k≧2 の時には，集合被覆問題として考えると，近似比 log(n)の欲張り法が存在するが，計算量は O(mn) である．ただし m は枝数を表す．

本研究は k≧2 と大規模な問題を念頭に，グラフの性質をによって改善可能の発想に基づき，いくつかのグラフ族に対して線形時間アルゴリズムの設計を考える．

３．研究の方法

まず先行研究を紹介する．大規模なネットワークと k≧2 の場合に対して，よく知られている欲張り法とアルゴリズム Sieve（Sasaki et al.，ICCS 2008）がある．欲張り法は，新たに被覆できる点の最も多い節点を次々解に加えていく方法である．O(log n)の近似比が理論的に保証される．ただし，毎回被覆範囲が最大の節点を選ぶのに手間がかかるため，全体で O(mn)時間がかかる．

一方 Sieve は，あらかじめ次数の大きい順に節点を並べておいて，順に「一つでもいままで被覆されなかった点を被覆できるか」を効率よくテストし，YES ならその点を解に加えていき，最後に極小化を行うことになっている．一つでも被覆できれば解に入るというところが，線形時間の計算量に貢献するが，解の質への保証が不足すると考えられる．

そこで本研究は，欲張り法と Sieve の合体法を考える．すなわち，毎回，残余次数の最も高い節点を選ぶことである．ただし残余次数とは，まだ被覆されていない隣接点の数である．k=1 のときは欲張り法そのものであることに留意されたい．隣接点のみを見ればよいので全体で線形時間となるが，一方で Sieve より欲張っているので解の質の改善が期待できる．その他の部分は，Sieve と同じように探索や極小化を行い，全体の計算量を線形に抑えられることを示せる．研究成果の①はこの方法に関する結果である．

また，別のグラフクラスとして，極大平面グラフという簡単なクラスを考えた．過去の研究をレビューしたところ，k=1 のときは，すでにいいアルゴリズムが存在することがわかった．k=2 の場合は，グラフ理論の分野では先行研究があって，理論的近似比について言えているが，アルゴリズムは存在しなかったため，それに対する線形時間のアルゴリズムを開発する．さらに k=3, …, のとき（実際はもっと範囲の広い問題クラスも適用可能と思われるが，）まで拡張も行いたい．

アイディアは，まずサイクルグラフに対してすべての最適解を列挙したのち，極大平面グラフをサイクルに一定のルールに従って三角形（耳と呼ぶ）を加えたものと考え，その逆のプロセスでサイクルの最適解から極大平面グラフに対する近似解を構築していく方法である．そのため，線形時間で複数のよい解を見つけることができると考えられる．研究成果の②は，この研究に関するものである．

ほかのグラフクラスも考えるべきである．実際，次数が Power Law を満たす，いわゆる複雑ネットワークについては，Sieve は定数の近似比を持つことが分かった．ほぼ自明なので特に発表はしなかったが，インターネットが複雑ネットワークであることがよく知られているので，なぜ実験で Sieve がよい近似比を持つことへの裏付けとなった．同様に，問題設定の変種もいくつか考えたが，容易に拡張できることが分かった．

最後に，本研究の応用も考える．すなわち，アルゴリズムそのものではなくて，現実のネットワークに対して計算で得られた結果の意味を考える．ここでは，特に道路ネットワークとソーシャルネットワークに着目する．前者の場合，防災拠点の検討に使える．後者の場合，ソーシャルネットワークにおいては，距離が人と人の親密さを表すため，本研究で扱う距離 k の集合被覆問題は，民主度の計算や代表の選出に役立つと考えられる．そこで，

様々な社会ネットワークに対して計算を行い，その結果が持つ社会的意味を考察する．

４．研究成果

① 大規模な複雑ネットワークに対する先行研究の改善（雑誌論文⑤，⑥，学会発表③，著書①）：主双対法によって答えの精度を評価したところ，従来の Sieve 法に比べ，精度が同レベルでありながら，安定性がよくなったと評価できる．詳しい実験結果は著書①を参照されたいが，ここではサイズ一番大きい実験例の結果を示す．

データ：http://snap.stanford.edu/data/

対象ネットワーク：com-Friendster

節点数：65,608,366

枝数：3,612,134,270（有向枝の数）

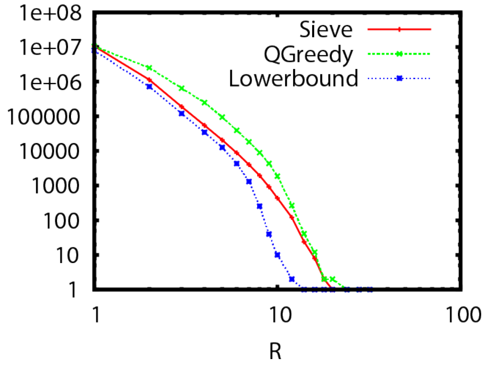

図１．出力解サイズの比較（小さいほどよい）．なお，横軸 R は支配半径 k のこと，縦軸は出力解のサイズを表している．Sieve は先行研究の方法，QGreedy は提案法，Lowerbound は双対法によって得られた計算の下界である．

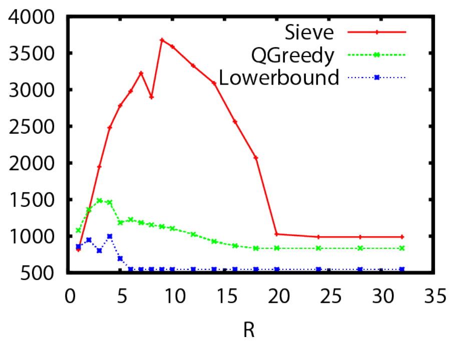

図２．計算時間の比較（単位：秒）．横軸 R は支配半径 k のこと，縦軸は計算時間を表している（小さいほどよい）．Sieve は先行研究の方法，QGreedy は提案法，Lowerbound は下界を計算する双対法のことである．

② 極大平面グラフに対して新しいアルゴリズムを開発した（雑誌論文①，④，学会発表①，②）：従来の k=1，2 の研究を踏まえ，k=3 にも対応できる新しいアルゴリズムを開発した（実際はもう少し一般化した問題にも適用できる）．特徴は，線形時間であることと，同時に複数の適合解を出力できることである．詳しくは雑誌論文①を参照されたいが，ここでは学会発表①で示した結果のまとめを引用する．なお，表にある Zhao et al’14 の結果は雑誌論文④，this study は学会発表①のものである．とも本科研費の援助による結果である．

表１．学会発表①で示した結果のまとめ．表にある Zhao et al’14 の結果雑誌論文④，this study は学会発表①のものである．とも本科研費の援助による結果である．

k	exact algo.	graph theory	algo. (size $\le$, time, #)[1,2]
1	$O(n)$ time Kikuno et al’83	$\gamma_1(n) = \lfloor n/3 \rfloor$ $\Rightarrow$	$(\lfloor n/3 \rfloor, O(n), \text{-})$ Matheson et al’96 [3]
2	open	$\gamma_2(n) = \lfloor n/5 \rfloor$ Canales et al’13	$(\lfloor n/5 \rfloor, O(n), 5-r)$ Zhao et al’14
3	open	$\gamma_3(n) = \lfloor n/7 \rfloor$ $\Rightarrow$	$(\lfloor n/7 \rfloor, O(n), 7-r)$ this study
4+	open	$\gamma_k(n) = \lfloor \frac{n}{2k+1} \rfloor$?	next conjecture

[1] Field “#” indicates the number of disjoint solutions (at least).
[2] $r = n \mod (2k+1) = n - (2k+1)\lfloor \frac{n}{2k+1} \rfloor$.
[3] Their result is true for a wider graph class (triangulated discs).

③ 応用（雑誌論文②，③）：対象をインターネットから道路ネットワークやソーシャルネットワークに拡張し，避難所の配置の検討やネットワークの支配，代表選挙における問題に対して数理モデルとアルゴリズムを研究した．現在，ある法律の問題にも適用できそうな面白い発見を得られたので論文を準備している．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Liang Zhao, “$\gamma_k(n) = \max \{\lfloor n/(2k+1) \rfloor, 1\}$ for maximal outerplanar graphs with $n \bmod (2k+1) \le 6$,” IPSJ Journal of Information Processing (special issue), 2017.08 (to appear)

② Liang Zhao, “Optimal Assignment of Wide-Area Evacuation Centers for Kyoto City,” in Proc. 5th Operations Research and Statistics (ORS 2017), 171-174 (2017.03)

③ Liang Zhao, “Majority Dominating and Democratic Number: A Proposal to Define the Democracy of a Social Network,” in Proc. 4th Operations Research and Statistics (ORS 2016), 66-67 (2016.01)

④ Liang Zhao, Jia Li and Dorothea Wagner,

“$\gamma_k(G) \le \lfloor \frac{n}{2k+1} \rfloor$ for maximal outerplanar graphs satisfying $n \bmod (2k+1) \le 4$,” in Proc. 17th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC 2014), (2014.07)

⑤ Liang Zhao, Hiroshi Kadowaki, Dorothea Wagner, “A practical approach for finding small {independent, distance} dominating sets in large-scale graphs,” Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 8286, 157-164 (2013.12)

⑥ Liang Zhao and Hiroshi Kadowaki, “An Improved Linear-Time Algorithm for Finding Small L-Vertex Covers,” in Proc. 16th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC 2013), (2013.07)

〔学会発表〕（計３件）

① Liang Zhao, “A Note on Distance Domination in Maximal Outerplanar Graphs (Extended Abstract),” in Proc. JCDCG3 2016, (2016.09)

② Liang Zhao, Jia Li, Dorothea Wagner, A note on distance dominating in maximal outerplanar graphs, 研究報告アルゴリズム（AL） 2014(14), 1-3, 2014年２月.

③ 門脇 拓史，趙 亮，Wagner Dorothea, 大規模グラフにおける距離つき独立支配集合について，電子情報通信学会技術研究報告 COMP，コンピュテーション 113 (371), 27-31, 2013年12月.

〔図書〕（計１件）

① Liang Zhao, Finding Small Dominating Sets in Large-Scale Networks, in “Big Data of Complex Networks,” Matthias Dehmer et al eds., pp. 121-146, Chapman and Hall/CRC (Aug. 2016).

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

・作成したプログラムを，中国重慶大学や大連理工大学の研究者に提供した実績がある.

６．研究組織

(1)研究代表者
趙　亮　　　　(ZHAO, Liang)
京都大学・総合生存学館・准教授
研究者番号：90344902

(2)研究分担者（該当なし）
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者（該当なし）
(　　)

研究者番号：

(4)研究協力者（該当なし）
(　　)