様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４０００１７

研究課題名（和文）アラケロフ幾何学の手法を用いたレギュレーター写像の研究

研究課題名（英文）Study on regulator maps using the theory of Arakelov geometry

研究代表者
竹田　雄一郎（Takeda, Yuichiro）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：３０２６４５８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：　高次算術的リーマン・ロッホの定理の定式化とその証明に向けて，研究を行った．具体的には，iterated doubleと呼ばれる既約でない多様体上の計量つきベクトル束に付随する高次解析的トーションの理論を構成することを試みた．そして証明を完成させるために必要な高次解析的トーションに関する十分条件を見つけた．
　また筆者は，t-コア分割と呼ばれる特別な性質をもつ自然数の分割について研究を行った．そして，t-コア分割に関係する興味深い２次形式を発見して，その２次形式やそれに関連する有限体上の幾何を用いて，t-コア分割の分割数の間の関係式を導出するための，組み合わせ論的な手法を見出した．

研究成果の概要（英文）：We have made researches in order to formulate and prove higher arithmetic Riemann-Roch theorem. To be more precise, we have tried to construct the theory of higher analytic torsion forms associated with Hermitian vector bundles on an iterated double. We have found a sufficient condition under which the proof of the higher arithmetic Riemann-Roch theorem goes well.
We have made researches on a special class of partitions of natural numbers called t-core. We have found quadratic forms which are closely related to t-core partitions. We have given a purely combinatorial method to prove congruence conditions on numbers of t-core partitions. It relies on the theory of quadratic forms and geometry on finite fields.

研究分野：数論幾何学

キーワード：アラケロフ幾何学

１．研究開始当初の背景

アラケロフ幾何学の重要な定理のひとつに，算術的リーマン・ロッホの定理がある．この定理は，代数的な量と解析的な量が融合してひとつの等式を形成しており，アラケロフ幾何学の精神を体現する定理である．またこの定理は，ディオファントス幾何を始めとする数論幾何の多くの問題に応用されている．したがって，算術的リーマン・ロッホの定理の高次への拡張を証明することは，アラケロフ幾何学において重要な問題である．

本研究のもう一つのキーワードであるレギュレーター写像は，代数的 K 群と Deligne コホモロジーという代数多様体の２つの不変量の間の写像で，Beilinson によって代数多様体の L 関数の特殊値との関係が予想されるなど，数論幾何の世界で重要な研究対象である．レギュレーター写像は，アラケロフ幾何学と関係が深いことが知られている．例えば，算術的チャウ群やその高次への拡張である高次算術的チャウ群は，レギュレーター写像の余核を部分群として含んでいる．このことから，高次を含む算術的チャウ群の元の関係式から，レギュレーター写像に関する定理を導くことができる．

筆者は Burgos と Feliu と共同で，代数サイクルに沿った積分によりレギュレーター写像が明示的に記述できることを証明した（Int. Math. Res. Not. 2011, no.1）．この結果により，さまざまな多様体の代数サイクルに対してこの積分を計算することにより，整数論の世界で由緒正しい関数が現れることが予想される．実際申請者は，Bloch が定義したポリログ関数に関係する代数サイクルに対してこの積分を計算すると，ポリログ関数そのものが現れるという結果を得ている．

本研究の前段階として筆者は，iterated double と呼ばれる既約でない多様体（代数幾何における球面の類似の対象）上の，計量つきベクトル束の算術的チャーン指標の理論を完成させて，それを用いて高次算術的 K 群から高次算術的チャウ群への写像（以下高次算術的チャーン指標と呼ぶ）を構成した．

２．研究の目的

本研究の目的は，アラケロフ幾何学の研究手法やそこで得られた結果を用いて，さまざまな多様体のレギュレーター写像の像を計算することであった．具体的には，次のことを達成することを目的としていた．

（１）申請者が定義した高次算術的チャーン指標に関する算術的リーマン・ロッホの定理（以下高次算術的リーマン・ロッホの定理と呼ぶ）を定式化して，それを証明すること．また，その定理を応用することにより，レギュレーター写像に関する新しい結果を導くことを目標としていた．

（２）数論幾何的に興味深い代数多様体上の代数サイクルを明示的に構成して，筆者が Burgos と Feliu と共同で開発した代数サイクル上の積分を適用することにより，その代数サイクルのレギュレーター写像の像を明示的に計算すること．またその過程で，様々な特殊関数とレギュレーター写像の間の興味深い関係を見つけることを目標としていた．

３．研究の方法

（１）高次算術的チャーン指標の構成から，iterated double 上の計量つきベクトル束に対する算術的リーマン・ロッホの定理を証明することが，高次算術的リーマン・ロッホの定理の証明のためのキーポイントであることはわかっていた．算術的リーマン・ロッホの定理を定式化するためには解析的トーションの理論が必要不可欠なので，まずは iterated double 上の計量つきベクトルに付随する解析的トーションの理論を構築する．それから（高次でない）通常の算術的リーマン・ロッホの定理の証明を応用することにより,高次の算術的リーマン・ロッホの定理を証明する．

（２）まず，筆者が Burgos と Feliu と共同で開発した代数サイクル上の積分をコンパクトでない多様体に拡張する．その結果と筆者がすでに構成していたポリログ関数に関係のある代数サイクルを用いて，ポリログ関数の関数等式から構成される複体（ポリログ複体）からサイクル複体への写像が定義できることを示す．そしてその写像の像の上述の代数サイクル上の積分を計算することにより，数論的に興味深い多様体のレギュレーター写像の像を計算する．

４．研究成果

本研究ではまず，高次算術的チャーン指標の理論の整備を行った．高次算術的チャーン指標に関する論文を執筆して投稿した後，多くの誤りが見つかったので，高次算術的チャーン指標の理論を完璧なものにすべく論文の修正を行った．複雑な議論を含む 100 ページを超える論文なので，その修正に多くの時間を費やした．

その次に，高次算術的リーマン・ロッホの定理の定式化とその証明に向けて，研究を開始した．具体的には，iterated double 上の計量つきベクトル束に付随する高次解析的トーションの理論を構成することを試みた．高次解析的トーションは iterated double の

各既約成分上では問題なく定義できるのだが，それを高次算術的リーマン・ロッホの定理の証明に役立てるためには，iterated doubleはコンパクトでない多様体なので，その無限遠に沿っての挙動をあきらかにすることが重要である．解析的トーションに関する文献を精査し，また高次算術的チャーン指標の構成を反省することにより，高次算術的リーマン・ロッホの定理の証明がうまくいくための iterated double 上の高次解析的トーションに関する十分条件を筆者は見出した．それは，コンパクトでない多様体上の高次解析的トーションが，無限遠に沿って高々対数的増大度しかもたない，ということである．その後，高次解析的トーションに対する上述の性質を証明すべく研究を進めた．しかし現在知られている解析的トーションに関する研究結果を用いるだけではその目的を達成することは困難であることがわかった．

予定していた方法がうまくいかなかったので，別の方法による解析的トーションの構成を試みた．具体的には，次の方法をとった．まず iterated double の各既約成分上でそのコンパクト化をとる．そして iterated double 上のベクトル束の各既約成分への制限のそのコンパクト化への延長を考えて，その射影分解をとる．その分解はコンパクト化された多様体上の計量つきベクトル束の複体なので，その解析的トーションは iterated double の無限遠上で収束する．

この方法では解析的トーションの無限遠での挙動の問題は解決されるのだが，代わりに iterated double の各既約成分上の射影分解の貼り合わせの問題が生じる．より詳しくいうと，iterated double の既約成分は交わりをもつが，上述のように構成したベクトル束の複体は各既約成分上で独立に構成されている，異なる既約成分上の解析的トーションの交わりへの制限は一般には一致しない．したがってその相違を埋め合わせる２次的な不変量を導入することが，目標達成のためには必要である．より具体的に言うと，ボット・チャーンの高次特性類の理論をベクトル束の複体に拡張することが必要である．

筆者は，１次の特性類の場合にはそのような拡張が可能であることを示した．これを用いると１次の算術的Ｋ群に対するリーマン・ロッホの定理を定式化することができる．しかし２次以上の対象については，扱う対象が複雑になるために、これまで得られた手法だけでは高次特性類の理論を構成することができなかった．

解析的トーションのコンパクトでない多様体への拡張が解析的な困難のために実現の可能性が見出せなかったので，そのかわりに解析的な道具を用いない新しい算術的交叉理論を構築すべく，研究を開始した．そのために参考にしたのは，D. Toledo と Y. Tong によるチェック理論を用いた特性類の表示の理論である．筆者はまず，算術的曲面の場合に研究を行った．Deligne コホモロジーを定義する層のチェック複体を考えて，その上で Burgos による一般グリーン対象の理論を適用することにより，グリーン対象の類似をリーマン面上のチェック複体の中に構成することができた．この結果を算術的交叉理論に応用するためにはグリーン対象のスター積を定義する必要があるが，それを研究期間内に達成することはできなかった．

また筆者は，t-コア分割と呼ばれる特別な性質をもつ自然数の分割について研究を行った．まず K. Ono と L.Sze による 4-コア分割のラベリングを拡張して，一般の t-コア分割のラベリングを与えた．そしてそのラベリングと分割数そのものの間の関係を調べることにより，t-コア分割に関係する興味深い２次形式を発見した．その関係とは，２次形式に付随する直交群の整数ベクトルへの作用の軌道と t-コア分割の間の，１対１対応のことである．またこの対応により，t-コア分割の双対と整数ベクトルの−１倍が対応することもわかった．

t-コア分割の分割数に関してはこれまでに多くの結果が知られているが，そのほとんどが分割数の母関数を調べることにより導出されていた．筆者は，上の結果を利用すれば t-コア分割の分割数に関する結果を純粋に組み合わせ論的な議論によって導くことができるのではないかと考えて，研究を進めた．そして，t-コア分割の分割数の間の関係式を２次形式やそれに関連する有限体上の幾何を用いて導出する方法を見出した．特に 4-コア分割と 5-コア分割の分割数について，これまでに知られている合同条件を，母関数を用いることなく証明することができた．

この研究は母関数を経由せずに t-コア分割そのものを扱うので，t-コア分割そのものの性質について，新しい知見が得られるのではないかと，筆者は期待している．例えば，t-コア分割のクランク（自然数の分割の集合を濃度の等しい部分集合の和集合に分割するための統計的量のこと）を発見することや，従来のクランクについても未知の結果を導くことができるかもしれないと考えている．

また上の考え方を，自然数の３つの平方数の和による表現に応用した．そして，自然数の３つの平方数の和による表現の個数に関する合同条件を，その母関数を用いることなく証明することに成功した．また母関数を経由することなく３つの平方数の和による表現そのものを取り扱うことにより，次のことを証明することができた：３つの平方数の和による表現を整数ベクトルとして表すと，それらが素数べきを法とする合同関係によって，濃度の等しい部分集合の和に分割される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　０件）

〔図書〕（計　　０件）

６．研究組織
(1)研究代表者
竹田　雄一郎　（Yuichiro Takeda）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：30264584

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

なし