

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 12 日現在

機関番号：32714

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400029

研究課題名(和文)数体上の線型不等式系の同値類がなす淡中圏の構造とそのディオファントス近似への応用

研究課題名(英文)The structure of a tannakian category formed by equivalence classes of systems of linear inequalities over a number field and its application to diophantine approximation

研究代表者

藤森 雅巳 (FUJIMORI, Masami)

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授

研究者番号：20312093

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：数の有理近似に関する一性質を記述する線型不等式系の同値類全体は適当な群の表現全体と自然に同一視されることが知られていて、特に、有名なRothの不等式に対応する古典的線型不等式系がどのような代数群を經由して問題の群の表現とみなせるのかは本研究の研究代表者が前に明らかにしています。他方、その巨大な群の全体像の詳細は未だよく分かっていません。

この研究では、数とその平方の同時有理近似を与える線型不等式系がどのような代数群を經由して問題の巨大な群の表現とみなせるのかを、或る意味で例外的なものを除いて、解明しました。

研究成果の概要(英文)：It is known that the equivalence classes of systems of linear inequalities which describe a rational approximation property of numbers are naturally identified with the representations of some group. The representative of the present study had in particular shown before via what algebraic group a classical system of linear inequalities which corresponds to the famous Roth inequality is regarded as a representation of the said group. On the other hand, the details of the whole body of the huge group are not very clear yet.

In our present study, we have revealed via what algebraic group a system of linear inequalities which gives a simultaneous rational approximation to a number and to its square is considered a representation of the above-mentioned huge group, leaving aside an exceptional case in a certain sense.

研究分野：数物系科学

キーワード：代数学 数論 ディオファントス近似 数体 線型不等式 淡中圏 代数群 表現

1. 研究開始当初の背景

一般 Roth 系と呼ばれる数体上の線型不等式系について自然な同値類を考える(以下の4.(1)にて少し詳しく説明します)と、その同値類全体は淡中圏をなすことが知られています。淡中圏とは、適当なアフィン群の有限次元線型表現全体のなす圏と同一視出来る圏のことで、圏に付随する情報だけから元の群を復元することが出来ます。さて問題の淡中圏については、特に本研究の研究代表者の研究で、有名な Roth の不等式に対応する2変数線型不等式系の同値類がどのような代数群を商として経由した表現とみなせるのか既に解決されています(<引用文献>①)が、元のアフィン群の巨大な全体像の詳細は未だよく知られていません。Roth の不等式は単独の代数的数の有理数による近似(有理近似)に関する性質を記述していますので、次は自然に、幾つかの代数的数の同時有理近似を与える線型不等式系の同値類が具体的にどの代数群を商として経由した表現から得られるのか、素朴な疑問として浮かび上がります。

他方、本研究課題の申請時において本研究の研究代表者は、いかなる数体上の非自明有限群も一般 Roth 系の同値類全体がなす淡中圏を定めるアフィン群の商としては決して現れない、特に、その淡中圏を定めるアフィン群は連結であることの証明を得ていました。

2. 研究の目的

(1) 幾つかの代数的数の同時有理近似を与える線型不等式系のうち最も単純なのは、基礎体上の次数が3以上の代数的数とその平方の同時有理近似を与える3変数線型不等式系です。本研究課題の申請時において、この線型不等式系の同値類がどのような代数群の表現となっているのか決定することを目的としました。

(2) 幾つかの代数的数の同時有理近似を与えるより一般の線型不等式系は、例えば基礎体上の次数が4以上の代数的数とその平方・立方の同時有理近似を与える4変数線型不等式系となります。本研究課題の申請時において、これらより一般の線型不等式系の同値類がどのような代数群の表現となっているのか調べることも目的としました。

(3) 或る線型不等式系がどの代数群の表現とみなせるのか分かれば、その事実をディオファントス近似理論へ適用出来るかが問題となります。本研究課題の申請時において、数体上の線型不等式系の同値類がなす淡中圏に関し明らかにされた構造のディオファントス近似理論への応用を探ることを目的としました。

3. 研究の方法

- (1) 文献の調査.
- (2) セミナーや研究集会等への参加.
- (3) 他の研究者からの情報収集.
- (4) 得られた知識や情報の分析・省察と計算および統合.

4. 研究成果

(1) 有名な Roth の不等式の整数解の有限性は、それに適切に対応した線型不等式系の整数解の有限性から得られますが、その様に整数解を有限個しか持たない或る型の線型不等式系は一般 Roth 系と呼ばれます。座標変換で移り合う一般 Roth 系を同一視して出来る同値類を考えると、一般 Roth 系の同値類全体には自然に淡中圏(東北大学名誉教授・淡中忠郎(1908-1986)に由来)という構造が入り、一般 Roth 系の同値類全体はその構造により適当なアフィン群の有限次元線型表現全体と同等とみなせます。この意味で特に、任意の一般 Roth 系はアフィン群の表現空間(の基底)とみなせますが、更にアフィン群の有限次元線型表現は代数群を商として経由しますから、個々の一般 Roth 系は何か或る代数群の表現空間(の基底)とみなせます。さて有名な Roth の不等式に対応する2変数線型不等式系の同値類がどのような代数群を商として経由した表現とみなせるのかは、本研究の研究代表者の研究で、既に解決されていました(<引用文献>①)。

Roth の不等式は単独の代数的数の有理近似に関する性質を記述していますので、次は自然に、基礎体上の次数が3以上の代数的数とその平方の同時有理近似を与える3変数線型不等式系の同値類が具体的にどの代数群を商として経由した表現から得られるのか、素朴な疑問として浮かび上がります。本研究では、別途取り扱わざるを得ない例外的なものを除いて、それを解決しました。具体的に述べますと、不等式に現れる代数的数の基礎体上の拡大次数が3より大きく、基礎体上生成するその Galois 拡大の Galois 群が(2, 2, ...)型可換群以外るときには常に次数3の特殊線型群、不等式に現れる代数的数の基礎体上の拡大次数が丁度3のときには、その代数的数の生成する3次体のノルム1の元が定める乗法群が、有理点のなす群に同型という条件で特徴付けられる2次元非等方的トーラス、になることを証明しました。

同時有理近似を与える線型不等式系の一つを具体的な代数群の表現空間(の基底)として捉えたという点で、この成果は非常にインパクトがあり、また一つの大きな前進で

あると思いますが、他方、この同時有理近似を与える線型不等式系や Roth の不等式に対応する線型不等式系が代数群の表現空間(の基底)とみなせることの意味するところは未だに明らかではなく、今後の研究課題です。不等式に現れる代数的数の基礎体上生成する Galois 拡大の Galois 群が $(2, 2, \dots)$ 型可換群のときについても、どのような代数群の表現空間(の基底)とみなせるのか興味深く、こちらも今後の研究課題になりました。

(2) 4. (1)に説明した通り、一般 Roth 系の同値類全体は淡中圏をなし、従って適当なアフィン群の有限次元線型表現全体と同等とみなせます。このアフィン群は連結か否かという問題ですが、研究課題の申請時に本研究の研究代表者は、連結である即ちこのアフィン群の商として有限群が現れない、別の言い方をしますと、有限群の有限次元線型表現全体が一般 Roth 系の同値類全体のなす淡中圏の一部(充滿部分圏)として現れないことの証明をプレプリントにまとめてありました。

本研究課題の申請後から採択内定までの間に、更に、ベキ単と呼ばれる型の代数群も問題の淡中圏が定めるアフィン群の商としては決して現われず、従って特に、問題の淡中圏が定めるアフィン群の商となる代数群は必ず半単純元で生成されることも証明出来た為、連結性と共に一つの論文にまとめて雑誌に投稿したところ、受付から僅か一ヶ月半後、本研究課題の採択内定通知の 4 日前に受理されました(<引用文献> ②)。

研究発表記載の可否のルールから、この成果は「5. 主な発表論文等」には載せることは出来ませんが、平成 20~22 年度科学研究費補助金(基盤研究(C)課題番号 20540030)による成果を受け継ぎ続けて研究した結果であるという事実を慮り、ここに記したいと思います。

一般 Roth 系の同値類全体がなす淡中圏を定めるアフィン群は、その商である代数群の射影的極限として記述される故、この成果は問題のアフィン群を或る意味特徴付けていることになり、このアフィン群の大まかな様子が判明したという点で大変インパクトがあると思います。

(3) 基礎体上の次数が 3 以上の代数的数とその平方の同時有理近似を与える 3 変数線型不等式系の同値類が、具体的にどの代数群を商として経由した表現から得られるのか、例外的なものを除いて解決しましたので、次に自然に、体の乗法単位元と共に基礎体上線型独立な 2 つの代数的数の同時有理近似

を与える 3 変数線型不等式系の同値類がどのような代数群を商として経由した表現から得られるのかという問題と、基礎体上の次数が 4 以上の代数的数とその平方・立方の同時有理近似を与える 4 変数線型不等式系の同値類がどのような代数群を商として経由した表現から得られるのかという問題が立ち現れます。

本研究では後者の問題について検討をしてみました。より一般に、基礎体上の次数が n 以上の代数的数とその $(n-1)$ 乗までのベキの同時有理近似を与える n 変数線型不等式系の中には、これまでに解明した 2 変数・3 変数の場合と同様の代数群の表現(の基底)とみなせるものがあるという見当を付けることまでは出来ました。ただ、線型表現従って行列を取り扱っていますので、例えば 4 変数線型不等式系を取り上げる際には $4 \times 4 = 16$ 次元の空間の中で考える必要があり、実際に証明を書き下すのは容易なことではありません。システムティックな証明方法の探求を今後の研究課題としたいと思えます。

(4) 有名な Roth の不等式に対応する 2 変数線型不等式系である最も古典的 Roth 系の同値類は、不等式の係数の基礎体上の次数が 2 のときにはその 2 次拡大のノルム 1 の単数が定める 1 次元非等方的トーラスの表現、基礎体上の次数が 2 より大きいときにはすべて次数 2 の特殊線型群の表現とみなせるという事実は、(単純)連分数展開が実 2 次無理数のときに限って循環するというよく知られた事実に丁度符合しています。基礎体上の次数が 3 以上の代数的数とその平方の同時有理近似を与える 3 変数線型不等式系についても、4. (1)に述べた通り、不等式の係数の基礎体上の次数が 3 のときにはその 3 次拡大のノルム 1 の単数が定める 2 次元非等方的トーラスの表現、基礎体上の次数が 3 より大きいときには例外的なものを除いてすべて次数 3 の特殊線型群の表現とみなせるということが分かりましたから、適切なアルゴリズムの下、代数的数とその平方の「同時連分数展開」はその代数的数の有理数体上の次数が 3 のとき、その時に限って循環するという現象が期待されます。ただ実際には古くから現在に至るまで決定的な「同時連分数展開」のアルゴリズムは見出されておらず、例えば<引用文献>③では、代数的数とそのすべてのベキ乗数の「同時連分数展開」で、有理数体上の次数が 5 以下のときには循環しそうであるが次数が 6 になると上手く行っていない様なアルゴリズムが報告されています。

元の(単純)連分数展開は、係数の有理数体上の次数が 2 のときには 2 元 2 次形式の空間の整数点への離散群の作用として捉えられ、それにより展開の循環性が導かれます。本

研究では、係数の有理数体上の次数が3のときにも2元2次型式の空間に相当する適切な空間があり、そこへの離散群の作用を上手にコントロールするアルゴリズムが見出せば循環性が導かれると考えて検討しました。どのような空間を採ればよいのか判明するまでには到りませんでした。何れにせよ矢張り2元2次型式の空間より格段に次元が上がり、それらパラメタの値を同時にコントロールする必要があることは分かりました。引き続き研究課題としたいと思います。

<引用文献>

- ① 藤森雅巳、The algebraic groups leading to the Roth inequalities、J. Theor. Nombres Bordeaux、24 巻、2012、257–292
- ② 藤森雅巳、Connectedness of the Tannakian group attached to semi-stable multiple filtrations、Rend. Sem. Mat. Univ. Padova、131 巻、2014、209–216
- ③ 田村純一、安富真一、A new algorithm of continued fractions related to real algebraic number fields of degree ≤ 5 、Integers、11B 巻、2011、1–21

5. 主な発表論文等

[学会発表] (計1件)

- ① 藤森雅巳、(tentative) On the algebraic groups leading to a simultaneous approximation、Diophantine Analysis and Related Fields 2017、2017年1月7日～2017年1月9日、日本大学理工学部(東京都千代田区)

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/fujimori/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤森 雅巳 (FUJIMORI, Masami)

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授

研究者番号：20312093