

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 30 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400048

研究課題名(和文) 単線織代数多様体上の曲線の変形および障害

研究課題名(英文) Deformations of curves on a uniruled variety and their obstructions

研究代表者

那須 弘和 (Nasu, Hirokazu)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：30535331

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：3次元代数多様体上の曲線の変形障害について中間曲面を用いて研究した。曲線の1位無限小変形に対し、その第1障害が消えないための十分条件を与えた向井と那須による結果を精密化し、適用範囲を広げることに成功した。特に3次元多様体为非特異Fanoであり、曲面が $K3$ の場合に、曲線が変形障害を受ける(あるいは受けない)ための十分条件を、 $K3$ 上の(-2)-有理曲線と楕円曲線を用いて与えた。応用として3次元4次超曲面上の曲線のヒルベルトスキームが、生成的に被約でない既約成分を持つことを示した。得られた非被約成分は、pathologyとして有名なMumfordの例の類似物となっている。

研究成果の概要(英文)：We study the deformations of a smooth curve  $C$  on a smooth projective threefold  $V$ , assuming the presence of an intermediate smooth surface  $S$  between  $C$  and  $V$ . Generalizing a result of Mukai and Nasu, we give a new sufficient condition for a first order infinitesimal deformation of  $C$  in  $V$  to be primarily obstructed. In particular, when  $V$  is Fano and  $S$  is  $K3$ , we give a sufficient condition for  $C$  to be (un)obstructed in  $V$ , in terms of (-2)-curves and elliptic curves on  $S$ . Applying this result, we prove that the Hilbert scheme of smooth connected curves on a smooth quartic threefold contains infinitely many generically non-reduced irreducible components.

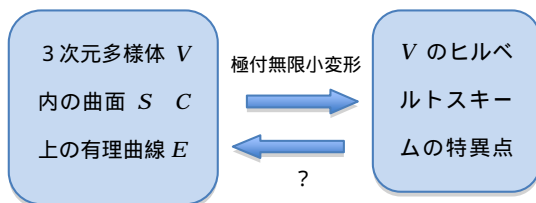
研究分野：代数幾何学

キーワード：無限小変形 ヒルベルトスキーム 障害類 4次超曲面  $K3$ 曲面 ファノ多様体 有理曲線 楕円曲線

1. 研究開始当初の背景

固定された射影的代数多様体上の曲線全体の集合には代数多様体(代数スキーム)の構造が入り, ヒルベルトスキームと呼ばれる. ヒルベルトスキームは, 代数幾何学における重要な研究対象であるモジュライの一つである. ヒルベルトスキームは考察対象の曲線を幾何学的に良い性質のものだけに制限しても, 一般には悪い特異点を持つことが知られている. そのような例を初めて与えたのは Mumford [1]である. 3次元射影空間  $\mathbb{P}^3$  内の非特異連結曲線のヒルベルトスキームの既約成分をひとつ与え, その生成点においてヒルベルトスキームが被約でない(non-reduced)ことを示し, 病理(pathology)と位置づけた. Mumford の例は Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia, Fløystad 等の研究者達により, 空間曲線のヒルベルトスキームの場合に様々な形で一般化され, Vakil [2]によりヒルベルトスキームは「Murphy の法則」を満たす, すなわち, 先天的に他の理由が無い限りモジュライ空間はいくらでも悪い特異点を持つことが示された.

研究代表者はヒルベルトスキームが悪い特異点を持つのが自然であるならば, その原因を系統立てて明らかにしたいと考えた. 学位論文[3]において空間曲線の 1 位無限小変形が 2 位変形にリフトする為の障害類(第 1 障害)を計算し, 加算無限個の Mumford 型非被約既約成分を構成した. 京都大学の向井茂氏との共同研究[4]において, この計算を精密化し, 3次元射影空間から任意の 3次元単線織代数多様体に一般化した後に, 与えられた 1 位無限小変形に対する「障害性判定定理」の形式にまとめた. この判定定理を  $\mathbb{P}^1$ -束や del Pezzo 多様体[5]上の曲線に適用することにより, Mumford の例を広範囲に一般化することに成功した. この一般化により, ヒルベルトスキームの病理の「病巣」とも言うべき非被約性の理由が, 代数多様体上のある種の有理曲線にあることが次第に明らかになってきている. 予想される関係を図示する.



[1] D. Mumford, *Further pathologies in algebraic geometry*. Amer. J. Math. 84 (1962), 642–648.  
 [2] R. Vakil, *Murphy's law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces*. Invent. Math. 164 (2006), no.

3, 569–590.

[3] H. Nasu, *Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 1, 117–141.  
 [4] S. Mukai, H. Nasu, *Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. J. Algebraic Geom.* 18 (2009), no. 4, 691–709.  
 [5] H. Nasu, *Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 60 (2010), no. 4, 1289–1316.

2. 研究の目的

本研究の目的は Mumford の与えた空間曲線のヒルベルトスキームの非被約既約成分の例を一般の代数多様体上の曲線のヒルベルトスキームの場合に一般化することにより, ヒルベルトスキームの特異点や次元など, その具体的性質について理解することである. その目的を達成する為の手段として, 高次元代数多様体上の曲線の被障害変形と多様体上の有理曲線との間に存在すると推測される興味深い関係について調査し, これを明らかにする.

3. 研究の方法

代数多様体上の曲線の変形について, 1 位無限小変形とそのリフト障害を用いた手法(ヒルベルトスキームの無限小解析)により研究を行う. 「1. 背景」で述べた「障害性判定定理」の精密化を行い, 一般化された定理を様々な代数多様体に適用することにより, 上述の被障害変形と有理曲線との間の関係を理解する. ヒルベルトスキームに関する先行研究の多くは, 射影空間のヒルベルトスキームに関するものであり, 一般の射影多様体のヒルベルトスキームに関する研究は比較的新しい. これまでの研究の主な道具としては, 射影空間の特殊状況を用いたもの(例えばリエゾン理論など)が多かった. 1 位無限小変形やその障害類の理論は小平や Spencer により導入され, 古くから存在するが, 研究代表者自身も, 具体的な問題に適用することは難しいと考えていた. カップ積による障害類の計算手法がヒルベルトスキームを研究する上で, 新たな道具となることを期待している.

4. 研究成果

(1) 障害性判定定理の一般化

向井・那須(2009)は、3次元射影多様体上の曲線に対し、与えられた1位無限小変形が2位変形にリフトしないための十分条件を与えた。1つ目の研究成果はこの結果の一般化である。上記のリフトに付随する変形障害は、法束  $N$  のコホモロジー群  $H^0(N)$  から  $H^1(N)$  への2次写像の像(カップ積)として定まる。そのため障害類の非零を示すことは一般に困難である。向井・那須では、極付き無限小変形と曲面上の(-1)-曲線を用いることにより、その非零が示された。Kleppe と Ottem は、2012年頃に出たプレプリントの中で、非特異4次曲面に含まれる空間曲線の変形について調べていた([6])。研究代表者は彼らの研究結果に刺激を受けて、様々な4次曲面上の空間曲線の変形障害を計算したところ、(-1)-曲線以外の有理曲線や、楕円曲線に極を持つ極付き無限小変形から、曲線の被障害変形(obstructed deformation)の例を構成することに成功した。この例を一般化し、上記の障害性判定定理を、極付き無限小変形の極の種類(極の曲線の種数、極の位数、極の可約性と多重性)に関して一般化した。この一般化により、Mumfordの非被約成分の例を広範囲に一般化できる可能性が広がった。研究開始当初は、代数多様体上の有理曲線が、そのヒルベルトスキームの病理現象に関与していると予想していた(「1. 背景」参照)。そのため、自己交点数0の非有理曲線(楕円曲線)に沿って極を持つような極付き無限小変形から、変形障害の存在を示せることは当初の予定になかった。本結果はヒルベルトスキームの研究に新しい展開をもたらした。

[6] J.O.Kleppe, J.C.Ottem, *Components of the Hilbert scheme of space curves on low-degree smooth surfaces*. Internat. J. Math. 26 (2015), no. 2, 1550017, 30 pp.

#### (2) Fano 多様体上の $K3$ 曲面に含まれる曲線の変形に関する研究

2013年度までに得られた非特異4次曲面上の曲線の変形障害に関する結果を、2014年度に一般の非特異  $K3$  曲面上の曲線の場合に拡張した。特に、非特異3次元 Fano 多様体  $V$  上の曲線  $C$  の変形障害に関する研究を行った。 $C$  が  $K3$  曲面  $S$  に含まれる場合に、 $S$  上の有理曲線と楕円曲線を用いて、 $C$  が変形障害を受ける (obstructed) 為の十分条件を与えた。また同時に、 $S$  上に有理曲線と楕円曲線のいずれも存在しなければ、 $C$  が  $V$  において変形障害を受けない (unobstructed) ことも示した。これが2つ目の研究成果である。変形障害を受けないという後半の結果は、「1. 背景」の図の「？」の方向が正しいことを支持する結果であり、研究代表者のこれまでの研究では得られなかった新しいタイプの結果である。前半の結果については、 $S$  上

の因子  $D=C+K_V$  が有効であり、かつコホモロジー群  $H^1(S, D)$  が消滅しない場合には、いつでも  $C$  が変形障害を受けることが予想されるが、残念ながら技術的な問題が解決できず(特に障害性判定定理の適用において)、未だ証明を得るに至っていない。

#### (3) 4次超曲面のヒルベルトスキームに関する研究

上記研究成果(1),(2)を非特異3次元4次超曲面  $V_4 \subset P^4$  に適用し、 $V_4$  内の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが、生成的に被約でない既約成分を可算無限個持つことを証明した。これが3つ目の研究成果である。Mumford の与えた空間曲線のヒルベルトスキームの非被約既約成分において、生成点に対応する曲線は非特異3次曲面に含まれていた。研究代表者のこれまでの研究により、3次曲面上の(-1)曲線が、成分の非被約性の原因であることがわかっている(「1. 背景」参照)。 $K3$  曲面上では、(-2)-曲線と楕円曲線が、Mumford の例における(-1)-曲線と同様の役割を果たす。その結果として、3次元 Fano 多様体  $V$  が  $K3$  曲面  $S$  を含むとき、ある条件のもとで、 $V$  上の曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を持つことを証明した。特に4次超曲面  $V_4$  のヒルベルトスキームもそのような既約成分を持つ。より一般に、Fano 指数1の全ての3次元 Fano 多様体に対し、そのヒルベルトスキームは生成的に被約でない既約成分を持つと予想されるが、残念ながら現段階ではまだ証明できていない。

#### (4) その他(インパクト、今後の展望など)

上述の研究成果(1),(2),(3)に関してまとめた論文「Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a  $K3$  surface」が完成し、アーカイブにおいて公表した(arXiv:1601.07301)。本論文は、3次元多様体上の曲線の変形に関する研究論文([4],[5]参照)のシリーズ第3作目となる。また、最終年度の2016年3月には、オスロ大学(ノルウェー)の代数・代数幾何学セミナーにおいて本研究成果に関する研究発表を行った。ノルウェーでは、1980年代に空間曲線や部分多様体の変形に関する研究が盛んに行われた経緯があり、セミナーには変形理論を専門とする研究者が多数来聴したが、研究結果(1),(2),(3)に対し一定の反響があったように思う。今後も曲線の部分多様体としての変形について、周囲の有理曲線や楕円曲線など特殊な曲線を利用し研究を行うことにより、空間曲線や、より一般の代数多様体上の曲線のヒルベルトスキームの研究が進展することが期待される。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者  
には下線)

[雑誌論文](計3件)

著者: 那須弘和  
論文標題: 3次元 Fano 多様体上の K3 曲  
面に含まれる曲線の変形障害について  
雑誌名: 研究集会「射影多様体の幾何  
とその周辺 2015」報告集  
査読: 無し  
発行年: 2016 年  
ページ: 31-44

著者: 那須弘和  
論文標題: *Obstructions to deforming  
space curves lying on an elliptic  
quartic surface*  
雑誌名: 京都大学数理解析研究所講究録  
「Fano 多様体の最近の進展」  
査読: 無し  
巻: 1897  
発行年: 2014  
ページ: 128-141

著者: 那須弘和  
論文標題: *Obstructions to deforming  
space curves lying on a smooth  
quartic surface*  
雑誌名: 第 11 回代数曲線論シンポジウ  
ム報告集  
査読: 無し  
発行年: 2014  
ページ: 105-117

[学会発表](計12件)

発表者: Hirokazu Nasu,  
発表標題: *Obstructions to deforming  
curves lying on a K3 surface in a Fano  
3-fold*  
学会等名: Seminar in Algebra and  
Algebraic Geometry  
発表年月日: 2016 年 3 月 3 日  
発表場所: Department of Mathematics,  
University of Oslo (ノルウェー・オス  
ロ)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *K3 曲面上の曲線の変形障害  
について*  
学会等名: グレブナー若手集会  
発表年月日: 2016 年 2 月 17 日  
発表場所: 東海大学(神奈川県・平塚市)

発表者: 那須弘和  
発表標題: 3次元代数多様体上の曲線の  
変形障害について  
学会等名: 埼玉大学数学科談話会

発表年月日: 2015 年 12 月 4 日  
発表場所: 埼玉大学(埼玉県・さいたま  
市)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *K3 曲面に含まれる 3次元 Fano  
多様体上の曲線の変形障害について*  
学会等名: 研究集会「射影多様体の幾何  
とその周辺 2015」  
発表年月日: 2015 年 10 月 31 日  
発表場所: 高知大学理学部(高知県・高  
知市)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *Obstructions to deforming  
curves lying on a K3 surface in a Fano  
3-fold*  
学会等名: 第 3 回 K3 曲面・エンリケス  
曲面ワークショップ  
発表年月日: 2015 年 8 月 17 日  
発表場所: 北海道教育大学札幌駅前サテ  
ライト(北海道・札幌市)

発表者: Hirokazu Nasu  
発表標題: *Obstructions to deforming  
curves on a threefold and non-reduced  
components of Hilbert schemes*  
学会等名: 第 13 回アフィン代数幾何学  
研究集会  
発表年月日: 2015 年 3 月 8 日  
発表場所: 関西学院大学大阪梅田キャン  
パス(大阪府・大阪市)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *Obstructions to deforming  
space curves lying on a quartic K3  
surface*  
学会等名: 研究集会「代数多様体とその  
周辺」  
発表年月日: 2014 年 9 月 30 日  
発表場所: 琉球大学理学部(沖縄県・中  
頭郡)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *Obstructions to deforming  
space curves lying on a smooth  
quartic surface*  
学会等名: 日本数学会秋季総合分科会  
発表年月日: 2014 年 9 月 28 日  
発表場所: 広島大学東広島キャンパス  
(広島県・東広島市)

発表者: 那須弘和  
発表標題: *Obstructions to deforming  
space curves lying on a smooth  
quartic surface*  
学会等名: シンポジウム「代数曲線論」  
第 11 回  
発表年月日: 2013 年 12 月 23 日  
発表場所: 首都大学東京南大沢キャンパ

ス(東京都・八王子市)

発表者：那須弘和

発表標題：*Obstructions to deforming space curves lying on an elliptic quartic surface*

学会等名：研究集会「Fano 多様体の最近の進展」

発表年月日：2013年12月18日

発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

発表者：Hirokazu Nasu

発表標題：*Introduction to Hilbert schemes of curves on a 3-fold*

学会等名：Workshop in Algebraic Geometry in Sapporo

発表年月日：2013年8月30日

発表場所：北海道大学理学部(北海道・札幌市)

発表者：那須弘和

発表標題：非特異4次曲面上の空間曲線の変形障害とヒルベルトスキーム

学会等名：第4回 代数曲面ワークショップ at 南大沢

発表年月日：2013年8月4日

発表場所：首都大学東京南大沢キャンパス(東京都・八王子市)

〔その他〕

ホームページ等

<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

那須 弘和 (NASU HIROKAZU)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：30535331

### (2) 研究分担者

無し

### (3) 連携研究者

無し