

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 18 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400092

研究課題名(和文) 安定ホモトピー圏のquasi-categoryを用いた研究

研究課題名(英文) Research on the stable homotopy category using quasi-categories

研究代表者

鳥居 猛 (Torii, Takeshi)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：30341407

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：安定ホモトピー圏およびその局所化について、quasi-categoryを用いた研究を行った。安定ホモトピー圏およびそのBousfield局所化はスペクトル系列を通して、ある群の表現のなす圏あるいはその導来圏と関連していると考えられる。今回このことの一つの定式化をモデル圏およびquasi-categoryの理論を用いて与えた。また、安定ホモトピー圏のMorava K理論による異なる局所化の代数的なモデルの間をつなぐ関手を構成した。さらに、これらのことに基づき、より一般的な表現のモジュライ空間についての研究も行った。

研究成果の概要(英文)：I have studied the stable homotopy category and its localizations by means of quasi-categories. Through spectral sequences, the stable homotopy category and its Bousfield localizations are considered to be related to the categories of representations for some groups and their derived categories. I gave a formulation of this relationship through the theories of model categories and quasi-categories. I have also constructed a functor between algebraic models of Bousfield localizations of the stable homotopy category via Morava K-theories. Furthermore, based on these, I have also studied more general moduli spaces of representations.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：安定ホモトピー圏 quasi-category モデル圏 Bousfield局所化 導来圏 表現のモジュライ Morava K理論

1. 研究開始当初の背景

安定ホモトピー圏は空間のホモトピー圏のある意味での線型化と考えることができ、三角圏の構造および閉対称モノイダル圏の構造が両立する形で成立する圏である。

安定ホモトピー論の基礎付け、意味付け、および定式化については現在でも活発な研究がなされている。特に、代数や数理物理などの他の数学の分野との相互関係から、空間やチェーン複体のなす圏などを射としてもつような高次の圏を扱えるような理論の整備が求められるようになっていた。これらの要請をみたすような高次の圏の理論については、dg-category, A category, derivator, Segal category, complete Segal space などいろいろな定式化が提案されているが、Joyal および Lurie による quasi-category の理論はそのうちの一つであり、古典的な圏や通常の代数の理論の一般化について他の理論よりも整備が進んでいた。

これら高次の圏の理論はこれまでの安定ホモトピー圏の理解についても新たな視点を提供し、安定ホモトピー論の一つの分野であるクロマティック・ホモトピー論についても、これらの高次の圏の理論に基づく理論のさらなる発展が期待されていた。

quasi-category の理論においてはスペクトラムのなす quasi-category が定義され、そのホモトピー圏として古典的な安定ホモトピー圏が得られる。この意味で、スペクトラムのなす quasi-category は安定ホモトピー圏より豊富な構造をもっていると考えられる。また、quasi-category の枠組みにおいては、スペクトラムのなす quasi-category は表現可能安定 quasi-category というクラスに属し、表現可能安定 quasi-category のなす対称モノイダル quasi-category における単位的対象になっている。この意味でスペクトラムのなす quasi-category はアーベル圏におけるアーベル群のなす圏の類似であると考えることができる。このことより、スペクトラムのなす quasi-category およびそのホモトピー圏である安定ホモトピー圏の重要性が改めて認識されるようになっていた。

また、古典的なスペクトラムの圏および安定ホモトピー圏からスペクトラムのなす quasi-category に移行することにより得られた新しい結果として、Goerss, Hopkins, Miller による位相的モジュラー形式スペクトラムの E 環スペクトラムの障害理論を用いた構成が Lurie により新たな視点から見直されている。ホモトピー的代数幾何の枠組みにおいて、ある種の性質を満たす楕円コホモロジーを楕円曲線のホモトピー論の一般化だとみなし、そのモジュライ問題を考えるこ

とにより、位相的モジュラー形式スペクトラムの自然な構成が得られるなどの成果が得られていた。

2. 研究の目的

安定ホモトピー圏の局所的・大域的構造と整数論的・代数幾何学的構造との関係を quasi-category やホモトピー的代数幾何の観点・手法を用いて理解することが研究目的である。

安定ホモトピー圏は複素コボルディズム関手 MU と複素ベクトル束の MU における Chern 類を通して 1 次元可換形式群と密接に関係しており、複素コボルディズム MU のホモトピー群のなす係数環は普遍的な形式群が存在する環(Lazard 環)と同型になっている。この MU と形式群との関係を基にして、安定ホモトピー圏には、形式群の高さに対応する階層構造(クロマティック・フィルトレーション)を定義することができることが知られている。また、このクロマティック・フィルトレーションの部分商は Morava K 理論 $K(n)$ で局所化された極小な部分三角圏と同値になることが知られている。これより安定ホモトピー圏は様々な素数 p と様々な非負整数 n に関する Morava K 理論 $K(n)$ による局所化を基本構成単位として、それらを積み上げたような構造をしていると考えられる。このことよりまず各 Morava K 理論による局所化を理解し、次にそれら各局所化同士がどのようなつながり具合になっているかを調べるということがクロマティックの手法による安定ホモトピー圏の大域的構造の理解に向けた基本的な戦略といえる。

これらのクロマティック・ホモトピー論の基本的な戦略をもう一度 quasi-category やホモトピー的代数幾何などの新しい観点・視点から見直しを行い、また、形式群の変形のモジュライ空間やその上のレベル構造などを通して、安定ホモトピー圏の局所的・大域的な構造と整数論的・代数幾何学的構造との関係の理解を目指すことが研究目的である。

3. 研究の方法

球面スペクトラム S には可換 S 代数(E 環スペクトラム)の構造が入り、スペクトラムの圏は球面スペクトラム S 上の加群の圏とみなすことができる。通常の代数との類似では、球面スペクトラムは整数のなす環に対応し、スペクトラムの圏は、整数のなす環上の加群あるいはチェーン複体のなす圏の類似であると考えられる。

一般に S 代数 A 上の加群の圏には Quillen の意味の単体的モデル圏の構造を入れることができ、単体的脈体をとることにより A 加群

の quasi-category $\text{Mod}(A)$ が構成できる。複素コボルディズム MU のホモトピー可換環スペクトラムの構造は可換 S 代数の構造に持ち上がることが知られており、これより、複素コボルディズム MU の enveloping 代数 $\text{MU} \otimes \text{MU}^{\text{op}}$ も可換 S 代数の構造をもつ。よって、enveloping 代数 $\text{MU} \otimes \text{MU}^{\text{op}}$ 上の加群の quasi-category として、 MU - MU 両側加群の quasi-category $\text{Mod}(\text{MU}-\text{MU})$ が定義される。複素コボルディズム MU の余作用素代数 $\text{MU} \otimes \text{MU}$ は可換 S 代数の構造をもち、また、 MU - MU 両側加群の quasi-category $\text{Mod}(\text{MU}-\text{MU})$ における余代数の構造をもつ。これらのことより、 $\text{MU} \otimes \text{MU}$ 余加群のなす quasi-category $\text{Comod}(\text{MU} \otimes \text{MU})$ を定義することができる。

複素コボルディズム MU は安定ホモトピー圏の有限スペクトラムのなす充満部分圏を調べるのに、非常に強力な道具であることが知られている。このことより、安定ホモトピー圏の対象であるスペクトラムのなす quasi-category と、複素コボルディズム MU の余作用素代数 $\text{MU} \otimes \text{MU}$ 上の余加群の quasi-category $\text{Comod}(\text{MU} \otimes \text{MU})$ とは密接な関係があると考えられ、この関係の理解に向けて研究する。

また、安定ホモトピー圏におけるクロマティック・フィルトレーションに対応する Bousfield 局所化として、Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ や Morava K 理論 $K(n)$ は重要な働きをする。これら Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ や Morava $K(n)$ スペクトラムのホモトピー環スペクトラムの構造は S 代数の構造に持ち上がることが知られている。この S 代数としての構造より、両側加群のなす quasi-category を定義することができ、余作用素代数 $E(n) \otimes E(n)$ や $K(n) \otimes K(n)$ 上の余加群のなす quasi-category $\text{Comod}(E(n) \otimes E(n))$ や $\text{Comod}(K(n) \otimes K(n))$ を考えることができる。これら余加群のなす quasi-category と安定ホモトピー圏における局所化との関係についても研究する。

また、Morava K 理論 $K(n)$ による局所化圏では Morava E 理論 E_n とその拡大安定化群 G_n が重要な対象であることが知られている。拡大安定化群 G_n は副有限群であり、Davis および Behrens-Davis により、一般の副有限群の離散的作用をもつスペクトラムのモデル圏の理論、および副有限群を Galois 群としてもつ可換 S 代数の Galois 理論が整備されている。これらの理論を間に挟むことによって、Morava K 理論 $K(n)$ による局所化圏と余作用素代数 $K(n) \otimes K(n)$ 上の余加群のなす quasi-category $\text{Comod}(K(n) \otimes K(n))$ の関係について研究する。

また、これらの余加群のなる quasi-category は(仮想的な)群の表現の圏、あるいは、その

導来圏と密接な関係にあると考えられることから、より一般的な立場から表現のモジュライ空間についての代数的および位相幾何的性質について研究を行う。

4 . 研究成果

S 代数 A に対して、 A の余作用素代数 $A \otimes A$ 上の余加群のなす quasi-category $\text{Comod}(A \otimes A)$ とスペクトラムの quasi-category Sp の局所化 $L_n \text{Sp}$ との関係について、いくつかの結果を得た。

複素コボルディズム MU ホモロジーをとることにより、スペクトラムの quasi-category Sp から余作用素代数 $\text{MU} \otimes \text{MU}$ 上の余加群の quasi-category $\text{Comod}(\text{MU} \otimes \text{MU})$ への関手が得られる。この関手の連結スペクトラムのなす Sp の部分圏への制限が連結な $\text{MU} \otimes \text{MU}$ 余加群の部分圏への同値を与えることを示した。また、同様なことが p -局所的なスペクトラムと Brown-Peterson 理論 BP でも成り立つことを示した。さらに、Johnson-Wilson 理論 $E(n)$ に関しては、 $E(n)$ 局所的なスペクトラムのなす quasi-category $L_{E(n)} \text{Sp}$ から余作用素代数 $E(n) \otimes E(n)$ 上の余加群のなす quasi-category $\text{Comod}(E(n) \otimes E(n))$ への $E(n)$ ホモロジーをとる関手が quasi-category の同値を与えることを示した。

安定ホモトピー圏の Morava K 理論による局所化については、Adams 型のスペクトル系列を通して連続 G_n 作用をもつ完備 E_n 加群の導来圏と密接に関係していると考えられる。ここで、 E_n は Morava E 理論であり、 G_n はその拡大安定化群である。一般に群 G の作用をもつ加群の導来圏は G 作用をもつスペクトラムのホモトピー圏と関係があると考えられる。ここで、拡大 Morava 安定化群 G_n が副有限群であることから、 G_n 作用をもつスペクトラムの圏として Behrens-Davis による対称離散 G_n スペクトラムを用いることを考える。ただし、この場合 Morava E 理論 E_n は対称離散 G_n スペクトラムとはならないため、Davis により導入された E_n の離散モデル F_n を用いる。すると、対称離散 G_n スペクトラムのなす圏における F_n 上の加群対象のなすモデル圏を構成することができ、それに付随する quasi-category $\text{Mod}(F_n, G_n)$ が得られる。このとき、 $K(n)$ 局所スペクトラムのなす quasi-category $L_{K(n)} \text{Sp}$ が、 $\text{Mod}(F_n, G_n)$ と同値になることを示した。

E 環スペクトラムは、特に、 H 環スペクトラムの構造をもつことから、Morava K 理論 $K(n)$ に関して局所的な可換 E_n 代数のホモトピー群はべき作用素をもつ。また、 $K(n)$ 局所可換 E_n 代数のホモトピー群におけるべき作用素の性質を抽象化した代数的モデルが Rezk により与えられている。この代数的モデルと以前に構成した一般化された Chern 指標および、

形式群の一般化である p 加除群の理論を用いることにより、 $K(n+1)$ 局所可換 E_{n+1} 代数の代数的モデルから $K(n)$ 局所可換 E_n 代数の代数的モデルへの関手を構成した。さらに、有限 CW 複体から E_n への関数スペクトラムのべき作用素付きのホモトピー群の構造が、 E_{n+1} への関数スペクトラムのべき作用素付きのホモトピー群の構造から得られることを示した。

安定ホモトピー圏およびその局所化はある(仮想的な)群の表現の圏あるいはその導来圏の類似と考えることができる。このことより、より一般的な表現のモジュライ空間についての研究を行い、山梨大学の中本和典氏との共同研究により、自由モノイドの次数 2 の表現のモジュライ空間の構造および代数的、位相幾何学的な性質について結果を得た。

5 . 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Takeshi Torii,
Comparison of power operations in Morava E-theories,
Homology, Homotopy and Applications,
査読有, 19 巻, 2017 年, 59 - 87,
doi:10.4310/HHA.2017.v19.n1.a4

Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii,
Virtual Hodge polynomials of the moduli spaces of representations of degree 2 for free monoids,
Kodai Mathematical Journal,
査読有, 39 巻, 2016 年, 80 - 109,
doi:10.2996/kmj/1458651693

[学会発表](計 13 件)

鳥居 猛,
A model of the $K(n)$ -local category,
安定ホモトピー論とその周辺,
2017 年 3 月 15 日,
岡山大学理学部 (岡山県岡山市)

鳥居 猛,
Tannaka duality in stable homotopy theory,
高知ホモトピー論談話会,
2016 年 12 月 27 日,
高知大学理学部 (高知県高知市)

鳥居 猛,
Exotic models for localized stable homotopy categories,
高知ホモトピー論談話会,
2015 年 12 月 26 日,
高知大学理学部 (高知県高知市)

鳥居 猛,
Morava E 理論におけるべき作用素の比較,
京都大学数学教室談話会,
2015 年 12 月 16 日,
京都大学理学部 (京都府京都市)

鳥居 猛,
Quasi-categories of comodules and Landweber exactness,
The 6th East Asian Conference on Algebraic Topology,
2015 年 12 月 2 日,
National Institute of Mathematical Sciences, Daejeon (韓国)

鳥居 猛,
Quasi-categories of comodules and Landweber exactness,
ホモトピー論シンポジウム,
2015 年 11 月 21 日,
姫路・西はりま地場産業センター (兵庫県姫路市)

鳥居 猛,
Quasi-categories of comodules and Landweber exactness,
Bousfield classes forms a set: a workshop in memory of Tetsusuke Ohkawa,
2015 年 8 月 28 日,
名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (愛知県名古屋市)

鳥居 猛,
Quasi-Categories of comodules and Landweber exactness,
空間の代数的・幾何的モデルとその周辺,
2015 年 8 月 18 日,
信州大学理学部 (長野県松本市)

鳥居 猛,
Comparison of power operations in Morava E-theories,
福岡大学ホモトピー論セミナー,
2015 年 1 月 11 日,
福岡大学セミナーハウス (福岡県福岡市)

鳥居 猛,
Twisted generalized cohomology theories,
高知ホモトピー論談話会,
2014 年 12 月 27 日,
高知大学理学部 (高知県高知市)

鳥居 猛,
局所安定ホモトピー圏の埋め込みについて,
福岡微分幾何研究会,
2014 年 10 月 31 日,
福岡大学セミナーハウス (福岡県福岡市)

Takeshi Torii,

Comparison of power operations in Morava
E-theories,
The 5th East Asian Conference of Algebraic
Topology,
2013年12月5日,
Chinese Academy of Sciences, Beijing
(China)

Takeshi Torii,
Comparison of power operations in Morava
E-theories,
Lloyd Roeling UL Lafayette Mathematics
Conference,
2013年11月9日,
University of Louisiana at Lafayette,
Lafayette (USA)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鳥居 猛 (TORII, Takeshi)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：30341407