様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １８ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００１０３

研究課題名（和文）簡約リー群の特異冪零軌道の量子化とユニタリ表現の実現

研究課題名（英文）Quantization of singular nilpotent orbits of reductive Lie groups and realization of unitary representations

研究代表者
山下　博（Yamashita, Hiroshi）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：３０１９２７９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，簡約リー群に対する随伴軌道の幾何学的量子化をとおして，特異冪零軌道に対応する既約ユニタリ表現の良い実現を与えることを研究の目的とした．その結果，実階数４の例外型単純リー群の四元数型特異ユニタリ表現のそれぞれから実放物型誘導表現（主系列）への埋め込みを特定し，当該の埋め込みが一意的であることを示した．さらに，四元数型特異冪零軌道の幾何構造を階数の低い管状のエルミート対称対あるいは四元数型対称対を用いて記述した．

研究成果の概要（英文）：In this research project, we aimed to give a good realization of irreducible unitary representations of reductive Lie groups corresponding to singular nilpotent orbits through geometric quantization of adjoint orbits. As a result, the embeddings of every singular quaternionic unitary representation of exceptional simple Lie groups of real rank 4 into real parabolically induced modules (the principal series) are specified, and we have shown the uniqueness of such embeddings. Moreover, geometric structure of singular quaternionic nilpotent orbits has been described in terms of lower rank Hermite symmetric pairs (tube type) or quaternionic symmetric pairs.

研究分野：解析学基礎

キーワード：リー群のユニタリ表現

１．研究開始当初の背景

(1) リー群の無限次元ユニタリ表現の研究は，ディラックや ハイゼンベルグらによる量子力学における考察に端を発し，函数解析学，代数解析学，数理物理学，整数論（特に保型形式の理論）をはじめとする多くの分野と深く関り合いながら，飛躍的な発展をとげてきた．例えば，ローレンツ群などの各種古典群を含む簡約リー群に対しては，ルート系・旗多様体・極大コンパクト部分群などの豊富な内部構造を活用し，表現の誘導・コホモロジー・D-加群など様々な手法で既約許容表現が分類・構成されてきた．さらに，フーリエ変換を通して正則表現の既約分解を具体的に与えるプランシェレル定理の確立など，表現論と調和解析における基本的問題に対する研究が進んできた．このような基本的成果を踏まえて，簡約リー群のユニタリ表現の研究は，ユニタリ表現をそれに密接に関わる等質空間や群軌道の構造と新たな視点から関連づけて深く追究することによって，表現論自身の深化と関連諸分野との連携の両面での進展が期待される状況にある．とりわけ，極小表現やサイズの小さなユニタリ表現を念頭において David Vogan により提唱された「対称対に関する冪零 K-軌道の幾何学的量子化」(K は簡約リー群の極大コンパクト部分群の複素化）は，この方向での研究に有効な指導理念を与えるものとして注目されている．

(2)本研究に先立ち，研究代表者は冪零 K-軌道を用いた簡約リー群のユニタリ表現の研究を推進し，

①Wallach による基本的表現のテンソル積の分解に現れる特異ユニタリ最高ウェイト加群が，当該表現に付随した等方表現が定める冪零軌道上のベクトル束の切断の空間にフォック実現できること

②実階数４の例外型単純リー群の四元数型特異既約ユニタリ表現が冪零 K-軌道の幾何学的量子化によって実現されること

を見出して，冪零 K-軌道と特異ユニタリ表現の実現の間の直接的な結びつきを明らかにしていた（引用文献①及び②参照).

これらの研究(特に②)をさらに深化・発展させ，複素化リー代数の極大放物型部分環の冪零根基と交わる，特異性が高く比較的次元の低い冪零 K-軌道(特異冪零軌道)を対象に，幾何学的量子化の観点から特異既約ユニタリ表現の実現に関する研究を本格的に行う必要があるとの認識から，本課題研究を着想するに至った．

２．研究の目的

本研究では，簡約リー群に対する随伴軌道の幾何学的量子化の枠組みにおいて，特異冪零軌道に対応する既約ユニタリ表現について，これらのユニタリ表現の良い実現を与えることを研究の目的とした．そのために，随伴サイクル・等方表現といった冪零軌道が関わる表現の幾何学的不変量を考察し，ユニタリ最高ウェイト表現や四元数型ユニタリ表現のフォック模型に関する研究代表者による最近の研究を深化・発展させるとともに，表現の一般化ホイタッカー模型あるいは（退化）主系列への埋め込みの研究を展開することにより，簡約リー群のユニタリ表現と等質空間上の非可換調和解析学の研究の発展に寄与することを目指した．

３．研究の方法

(1)簡約リー群の複素化リー代数において極大放物型部分環を与える次数付けに着目し，冪零根基に自然に生じる既約概均質ベクトル空間の軌道構造について，ルート系の情報を用いた研究を進めた．また，対応する特異冪零軌道上の K-等質ベクトル束が定める誘導表現について，スペクトル分解並びに当該誘導加群へのリー代数の次数化作用に関して，代数解析学的視点から調査研究を行った．さらに，当該極大放物型部分環からのコホモロジー誘導により得られる標準加群とその既約商についての検討に着手した．

(2)特異冪零軌道上の K-等質ベクトル束が定める誘導表現の構造を精査するため，簡約リー群の複素化リー代数の任意の放物型部分環を対象として，冪零根基の斉次的冪零元のレビ部分代数における固定化代数が自然に定めるトレース型固定指標の記述法について考察した．

(3)例外型リー群の特異冪零軌道に対応する四元数型既約ユニタリ表現の実放物型誘導表現（主系列）への埋め込みについて，リーマン対称空間上の「勾配型不変微分作用素」等を用いた研究を行った．勾配型不変微分作用素の表象写像は離散系列表現が定める冪零不変量（随伴多様体・等方表現）を記述するものである．表現の極小 K タイプを定めるパラメータが十分大きい四元数型離散系列表現の場合に，当該ユニタリ表現がちょうど３箇所の主系列表現において実現できるという研究代表者による先行研究を踏まえ，上の３つのうちのどの埋め込みが特異ユニタリ表現からの埋め込みを与え得るかを判定する方法を採った．

(4)本課題研究は，研究代表者が実質単独で取り組むものとしたが，研究の実施にあたっては，なかでも下記①～④の研究集会・学会を活用して，関連分野の研究者と研究打合せや情報交換を行った．

①表現論をテーマとした「RIMS 共同研究」（各年度６月，１０月の２回，京都大学）

②「表現論シンポジウム」(各年度11月頃，開催場所不定，平成25,26年度に参加)
③「表現論ワークショップ」(平成25年度に参加，京都大学（例年は鳥取市で開催))
④「日本数学会」年会（３月）及び秋季総合分科会（９月）

また，研究代表者は所属機関内において２名の連携研究者と「表現論セミナー」等における討議をとおして連携し，効果的に研究を進めた．

４．研究成果
(1)簡約リー群の複素化リー代数において極大放物型部分環を与える次数付けに着目し，その冪零根基内に自然に生じる既約概均質ベクトル空間の軌道の構造をより詳細に調べた結果，例外型単純リー代数の四元数構造から定まる極大放物型概均質ベクトル空間において，退化した３つ冪零軌道をより階数の低い「管状のエルミート対称対」及び「四元数型対称対」の情報と関連づけて記述することができた．具体的には，３つの退化冪零軌道を次元の小さい順にＺ（極小軌道)，Ｙ，Ｘとするとき，Ｚ及びＸには管状のエルミート型対称対，Ｙには四元数型対称対を定める極大放物型部分代数がそれぞれ深く関連している．この結果は概均質ベクトル空間の分類理論（佐藤・木村）やJ.-L.Clerc(2003, J. Algebra)によるジョルダン代数を用いた研究とも関連するが，引用文献②の研究を精密化し，特異冪零軌道の幾何構造に関する新たな視野を与えるのみならず，今後，それぞれの軌道に対応する既約ユニタリ表現の一般化ホイタッカー模型等の研究を進める上でも重要な役割を果たすものと期待している．また，球的冪零軌道の正規性についての（Kingによる）証明を検討し，その座標環上に定まる次数表現が軌道の固定部分群からの複素解析的誘導による表現と同値になることを確認した．

(2)簡約リー群の複素化リー代数の任意の放物型部分環を対象として，冪零根基の斉次的冪零元のレビ部分代数における固定化代数が自然に定めるトレース型固定指標の記述法を与えた．具体的には，当該放物型部分環及び冪零元が定める２種類の次数付けの間の相互関係を調べ，冪零元が特異的であるとき，固定化代数の自明でない中心元を構成した．さらにトレース型指標の当該中心元における値を与える公式を導出した．この公式を用いて，例外型リー代数の四元数型特異冪零軌道について，幾何学的量子化を定める「許容データ」を具体的に再構成することができる．この場合，トレース型指標は四元数型特異ユニタリ表現に対する等方表現（冪零不変量）と一致することも分かる（引用文献②)．

(3)簡約リー群に付随する複素簡約対称対(G, K)に対する特異冪零軌道上の K-等質ベクトル束が定める誘導表現の構造について，対称部分群Kが２次特殊線形群を直和因子にもつとき，ある種の仮定の下にGross-Wallachの結果を拡張し，特異冪零K-軌道に対する固定部分群の有限次元表現から誘導された加群の「標準分解」を与えた．この研究は，特異冪零軌道の量子化により得られるユニタリ表現の「変形」を与えるものであり，上記の誘導加群上に生じるリー代数の作用の対称性をより詳しく調べることで，特異ユニタリ表現の実現や特徴づけに新たな情報が得られるものと期待している．

(4)特異冪零軌道に対応する四元数型既約ユニタリ表現の実放物型誘導表現（主系列）への埋め込みについての研究を実施し，以下の成果をあげた．まず，四元数型離散系列表現の場合に，当該ユニタリ表現がちょうど３箇所の主系列表現において実現できるという研究代表者による先行結果（引用文献③第 6 節参照，証明は未発表）を再検討した．その結果を踏まえて，今度はパラメータを退化させたとき，リー代数の昇降演算子を用いて極小Kタイプベクトルが生成する加群の構造を調べることによって，上記３つの実現のうちの１つのみが特異既約ユニタリ表現の埋め込みを定め得ることを明らかにした（埋め込みの一意性)．このことは，極小ユニタリ表現（はしご表現）の極大放物型部分群からの退化主系列への埋め込みに関する Gross-Wallach の結果を他のタイプの四元数型特異ユニタリ表現の場合に拡張できることを示唆している．
　ただし，上記の結果を到達すべき最終形とは考えておらず，現時点では学術論文等による成果発表には至っていない．今後この方向の研究を進めることによって最終的な結果を導き，特異ユニタリ表現の実現や特徴づけについて，いっそう強力な理論の構築を図りたい．とくに，退化主系列への埋め込みを援用して，当該特異ユニタリ表現の一般化ホイタッカー模型の存在と一意性について，完全な理解が得られるように研究を進めていく計画である．

＜引用文献＞
①山下　博，単純リー群の特異ユニタリ表現の幾何学的実現と随伴サイクル，数理解析研究所講究録 1825，2013，142-152.

②山下　博，朱　富海，Quantization of quarternionic nilpotent K-orbits，日本数学会 2012 年度秋季総合分科会函数解析学分科会講演アブストラクト，2012，83-84.

③山下　博，Generalized Whittaker models and n-homology for some small irreducible representations of simple Lie groups，数理解析研究所講究録 1124，2000，86-105.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計１件）
①<u>山下　博</u>, 四元数型特異ユニタリ表現の実現について, 2013 年度表現論ワークショップ, 2013 年 9 月 13 日, 京都大学（京都府・京都市).

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山下　博（YAMASHITA, Hiroshi）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：３０１９２７９３

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
齋藤　睦（SAITO, Mutsumi）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：７０２１５５６５

阿部　紀行（ABE, Noriyuki）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：００５５３６２９

(4)研究協力者
（　　　）