

平成 28 年 5 月 9 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400113

研究課題名(和文) パンルヴェ方程式の非線型ストークス問題

研究課題名(英文) Nonlinear Stokes problems of the Painleve equation

研究代表者

大山 陽介 (Ohyama, Yousuke)

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：10221839

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：q-パンルヴェ方程式は古典的によく知られているパンルヴェ微分方程式の差分化である。q-パンルヴェ方程式の解が、特異点の周りで一般解がどう振る舞うのかを調べた。微分方程式の場合と違い、q-差分方程式の場合は局所的な挙動を記述する方法がよくわかってないので、まず、不確定特異点を持つ場合のq-線型方程式の接続問題を解いて、その接続係数を用いてq-パンルヴェ方程式の原点の周りで挙動を記述した。特に退化したq-パンルヴェ方程式の場合、対応する線型方程式が不確定特異点を持つので、その線型方程式は発散級数を解にもつため、ストークス現象があらわれるが、q-超幾何系の接続問題を解いてストークス係数を決定した。

研究成果の概要(英文)：We study a q-analogue of the Painleve equation, which is a difference equation. The main subject is a study of local behavior of generic solutions of q-Painleve equations around a fixed singular point. In case of nonlinear q-difference equation, it is difficult to express local behavior of solutions. We solve a connection problem of some linear q-difference equations with irregular singular points at first. Then we express local behavior of generic solutions of q-Painleve equations around the origin in terms of connection coefficients of the linear q-difference equation. In cases of degenerated q-Painleve equations, the corresponding linear equation has an irregular singular point. Since some local solutions are represented by divergent series, the Stokes phenomenon appears. We decided the Stokes coefficients by means of connection coefficients of q-hypergeometric equations.

研究分野：古典解析学

キーワード：パンルヴェ方程式 q-差分方程式 接続問題

1. 研究開始当初の背景

パウルヴェ方程式の漸近解析は 1913 年の Boutroux の先駆的な仕事に始まり、1970 年代よりさまざまな研究がなされてきて、現代ではかなり進展はあるものの、何がどこまで分かっているかがよくわからない状態になっている。また、漸近展開を求める方法も複数あってその適用範囲がよくわかっていない。逆にいうと、道具はそろっており、もう一度古典から現代における研究を整理し直す段階に来ているとも考えられた。

他方で q -パウルヴェ方程式の漸近解析はほとんど手付かずであった。微分方程式の類似として容易にできる部分もあれば、基本的な理論が未整備なものもあり、 q -パウルヴェ方程式の解析的理論が望まれるところであった。

2. 研究の目的

第 1 から第 6 まですべてのパウルヴェ方程式方程式の特異点の周りでの漸近挙動を決定し、その収束可能性(総和可能性)を調べ、その間の接続公式を求めて、非線型ストークス現象を厳密に記述することである。そのために、パウルヴェ方程式函数に対応して、モノドロミを不変にする線型方程式のストークス係数を含めたモノドロミ・データを完全に決定する。さらに、 q -差分パウルヴェ方程式方程式の場合にも漸近展開と接続公式を求めることを主目的とした。

3. 研究の方法

(1) 対応する線型方程式のモノドロミ・データと漸近解の対応を各ストークス領域で与えることで、接続問題を決定しようと試みた。線型モノドロミと対応した漸近級数の決定

再総和による正当化 接続係数の決定という手順を踏む。線型モノドロミが超幾何などに帰着する場合は、漸近解も簡単な形になるので、その場合も個別に扱っていった。

(2) パウルヴェ方程式の漸近解析の攻略では、形式解の計算、収束域の決定、接続問題の三つに分かれる。個々のタイプについて、最初の二つは今現在も相当できているが、収束域に関しては完全ではない。福原・岩野の定理による一般論を用いる部分に関しては 80 年代の高野・下村・吉田の結果で明快になっているが、個別に丁寧に見ていると単純ではない。例えば、第二パウルヴェ方程式の Hastings-McLeod 解の収束域はかなり広いものになる。第 5 方程式の無限遠の周りの解も、高野・下村らの結果と、Kitaev の結果との間に微妙にずれがあり、その違いを一つ一つ明らかにしていく。

(3) こうして漸近展開の完全なリストを作り、次に、 q -差分の場合や高階系の漸近展開に挑戦する。高階系は基本的には同じなので並行してできると考えられ、パウルヴェ階層のように問題によってはむしろ扱いやすいケースもある。

4. 研究成果

(1) 第 6 パウルヴェ方程式の q -類似の構造を調べるために、対応する q -差分線型方程式の帯域構造を調べた。 q -差分線型方程式に関してはパーコフによる拡張されたリーマン・ヒルベルト対応が知られている。このリーマン・ヒルベルト・パーコフ対応を精密化することで q -差分線型方程式の接続計数からモノドロミの不変量を取り出すことには一応成功したが、残念ながら十分満足する形は得られていない。

q -差分線型方程式の場合の問題点は、接続係数が定数ではなく楕円函数になるため不変量を取り出すのが容易ではない。 q -パウルヴェ VI 型方程式の場合は方程式の特殊性を用いて一つの関係式を満たす 3 つの不変量を取り出すことができ、本質的に 2 次元である。この 2 次元の曲面が q -パウルヴェ VI 型方程式の解空間(特性多様体)の generic な部分集合になると思われる。なおこの研究は、ツールーズでの共同研究に基づくものである。

(2) q -パウルヴェ VI 型方程式の構造を調べるために、対応する q -差分線型方程式の大域構造を調べたことに引き続いて、 q -パウルヴェ III 型、V 型方程式の構造を調べた。まず、特殊解として原点の周りでの有理型解を調べた。 q -パウルヴェ III 型、V 型方程式が原点の周りでの有理型の時は、正則になること(極を持たない)、さらにその場合は、対応する線型化方程式の接続行列が、 q -合流超幾何方程式の接続行列で記述できることを調べた。

さて、 q -差分線型方程式に関してはパーコフによる拡張されたリーマン・ヒルベルト対応が知られていたが、 q -差分線型方程式が不確定特異点を持つ場合には、リーマン・ヒルベルト対応に関してはほとんど何も分かっておらず、一般論が存在しない状況ではあるが q -パウルヴェ V 型方程式の場合も、原点の周りでは二重級数的なべき級数解を持つこと、そしてその場合も接続行列は q -合流超幾何方程式の接続行列とハイネの q -超幾何方程式の接続行列の積で記述できることを示した。

この結果は、数年前の眞野智行氏による q -パウルヴェ VI 型方程式の場合の結果の不確定の場合の類似になっていると考えられる。 q -パウルヴェ方程式の接続問題に関しては、眞野氏と報告者の結果以外にはほとんどなく、今後の課題となっている。そのためにも q -線型方程式の接続問題を考察しなければいけないが、2 階超幾何系の中で手付かずで残っていた、 q -Weber 方程式の接続問題が解けた(リアルでの Zhang 氏との共同研究)ことで一歩前進を見た。

(3) (2)と同様の計算を q -パウルヴェ III 型方程式の場合に押しすすめた。対応する線型

化方程式は不確定特異点を持つために q -ストークス問題を丁寧に扱う必要があるが、退化した q -差分線型方程式は二つの q -合流超幾何方程式に帰着することがわかった。特に原点周りでの有理型解の場合は一方の q -合流超幾何方程式がさらに退化するため、接続問題が単純化されて、大元の線型化方程式の大域問題が一つの q -合流超幾何方程式の接続問題に帰着することまでを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Y. Ohyama, Meromorphic solutions to the q -Painlevé equations around the origin, *J. Phys.: Conf. Ser.* 597, 012063, p.10, April 2015.

Y. Ohyama, S. Okumura, R. Fuchs' problem of the Painlevé equations, *Contemp. Math. AMS.* 593, 163-178, July 2013.

K. Kaneko and Y. Ohyama, Meromorphic Painlevé transcendents at a fixed singularity, *Math. Nachr.* 286, Issue 8-9, 861-875, June 2013.

[学会発表](計14件)

Y. Ohyama, Some q -Painlevé equations and q -divergent series, 研究会・Equations aux q -differences, Toulouse 大学, 2015年10月26日.

Y. Ohyama, Some special solutions to q -Painlevé equations, フランス・リール大学・国際研究会「Differential and Difference Equations: Analytic, Arithmetic and Galoisian Approaches」, 2015年10月23日

Y. Ohyama, The differential and difference Painlevé equations and connection problems, 「TIMS-OCAMI-WASEDA International workshop on Painlevé equations and related topics」, 台湾・台北大学, 2015年5月11日、13日(2回の招待講演).

Y. Ohyama, q -Stokes phenomenon of the Painlevé equations, 仏リール大学・函数方程式セミナー, 2015年3月23日.

Y. Ohyama, q -divergent series and q -Painlevé equations, パリ第6大学・Diophantine セミナー, 2015年3月12日.

大山 陽介, q -Painlevé 方程式の古典解析, 2014年度日本数学会秋季分科会・無限可積分系セッション特別講演, 広島大学, 2014

年9月26日.

大山 陽介, q -Painlevé 方程式と接続問題(2回講演), 「2014 函数方程式論サマーセミナー」, 静岡県伊豆の国市, 2014年8月6日、7日.

Y. Ohyama, Meromorphic solutions to the q -Painlevé equations around the origin, 「The 30th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics」, ベルギー・アントワープ大, 2014年7月17日.

Y. Ohyama, The Riemann-Hilbert-Birkhoff Problem and q -analogues of the Painlevé equations, 「Moduli spaces of connections」, フランス・レンヌ大, 2014年7月1日.

Y. Ohyama, The q -Painlevé equations and the Riemann-Hilbert-Birkhoff problem", 「Exponential analysis of differential equations and related topics」, 京大数理研, 2013年10月16日.

大山 陽介, A connection problem for linear q -difference equations related to the q -Painlevé equation, 「日本数学会無限可積分系セッション」, 愛媛大, 2013年9月25日.

大山 陽介, q -Painlevé 方程式と q -差分線型方程式の接続問題, 「2013年度偏微分方程式集中セミナー」, 兵庫県城崎町, 2013年8月8日.

Y. Ohyama, A connection problem for linear q -difference equations related to the q -Painlevé VI equation, 「The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics」, 札幌コンベンションセンター, 2013年7月5日.

Y. Ohyama, Asymptotic analysis on the Painlevé equations: Boutroux 100, 「Journées isomonodromiques」, フランス・トゥルーズ大, 2013年4月22日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/index.html>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

大山 陽介 (OHYAMA, Yousuke)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：10221839

(2) 連携研究者

渡辺 文彦 (Watanabe, Humihiko)

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号：20274433

鈴木 貴雄 (Suzuki, Takao)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：60527208