

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400153

研究課題名(和文) 領域変形と弾性体，電磁場の振動問題に現れる楕円型作用素の解析

研究課題名(英文) Singular domain deformation and analysis on elliptic operators in elasticity and electromagnetism

研究代表者

神保 秀一 (Jimbo, Shuichi)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80201565

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：正則および特異的な領域変形に対する楕円型作用素(ラメ作用素, ストークス作用素, マックスウェル作用素)のスペクトルの研究を行った (i) 弾性体の斉次方程式の多項式解, 有理型の関数の解の構成および構造の研究(本多氏, 伊東氏と共同), (ii) ストークス作用素のHadamard型変分公式(Dirichlet条件の場合, 牛越氏と共同), スリップ境界条件の場合も計算を行った(牛越氏と共同), マックスウェル作用素についても同じ結果を得た. (iii) 小さな穴の開いた領域上のラメ作用素およびマックスウェル作用素の固有値の摂動公式, (iv) 細い棒による複合弾性体の低周波固有数の挙動, を求めた.

研究成果の概要(英文)：I studied spectra of elliptic operators for regularly or singularly deformed domain (Lame operator, Stokes operator, Maxwell operator). (i) I studied polynomial solutions, rational type solutions with their structures of homogeneous Stokes and Elastic equations (with H.Ito, N.Honda), (ii) I obtained spectral Hadamard variational formula of Stokes operator, Maxwell operator for regularly perturbed domain for Dirichlet and Slip type boundary condition (with E. Ushikoshi). I obtained an elaborate behaviors of eigenvalues for Maxwell operator, (iii) I studied elaborate behaviors of eigenvalues of Lamé or Maxwell operators in a domain with small hole, (iv) I obtained elaborate behaviors of eigenfrequencies of elastic body composed of several thin rod.

研究分野：応用解析学, 偏微分方程式

キーワード：特異的領域変形 楕円型作用素 固有値問題

### 1. 研究開始当初の背景

物理現象において観測されるデータや量は、現象の入れ物である媒質の幾何的な形状をしばしば反映する。身近な例としては、吹奏楽器があげられる。楽器内部の空洞の形状や大きさが発生する音色を決める重要なファクターとなる(奏者は巧みな操作で空洞や境界を制御して曲を演奏する)。人間の発声においても同じ仕組みがある。また弾性体の振動でも同様で、たとえば地震が建物を振動(および共鳴)させる場合に低い建物と高い建物は異なる影響を受ける(高層ビルの長周期振動、等)。電磁気では電波の受信に関するアンテナ特性などの形状依存性などがあげられる。これらの物理現象においては幾何的に滑らかな領域変形のみならず、特異的な変形とみなされるような問題も多くある(細いハンドル体、不純物、欠陥、極端形状)。そして空洞や空間(音波や電磁波の場合)や媒質(弾性体の場合)のもつ固有振動数という形状や材質から決まる量が重要な役割を果たす(振動特性)。そしてそれらはおの各々の波動方程式の主部をなす楕円型作用素(系)の固有値(あるいはスペクトル)に対応する。こうして固有値(スペクトル)解析が重要な役割を担うことになる。数理物理に現れる固有値問題の重要性は、クーラン・ヒルベルトの書において強調され解析学に大きな研究の流れを創った。小さい記述ながら領域の変形に関する固有値の連続性なども扱われている。実は、それよりも早く20世紀初頭アダマールは、領域を滑らかに変形したときのラプラシアン(または重ラプラシアン)のグリーン関数や固有値の摂動公式を計算した(アダマールの変分公式)。無限の自由度をもつ領域変形に対する固有値(等)の変化率の導出は非常に画期的であり、アダマールは領域変分と偏微分方程式という分野のパイオニアと言える。ただ不運なことに直接の応用があまりなかったためか、以降半世紀このテーマはあまり追求されなかった。1960年代以降に特異的な領域変形の場合のラプラシアンの固有値の摂動問題に関する研究が現れ(これらは物理的背景をもっている)、様々な場合で漸近挙動の解析がなされた。代表的な2つのタイプのケースは、小さな穴(または欠陥)をもつ領域、および、細いハンドルをもつ領域である。前者に関する仕事では Rauch-Taylor, Ozawa (小澤真), Chavel, Cortois などの顕著な結果があげられる。後者では Beale が先駆者であるが、後に Arrieta, Gadyshin, Jimbo らのさらなる精密化や一般化の仕事が現れている。これらの領域摂動の仕事において、固定された領域  $\Omega$  およびその特異的な変形  $\Omega_\epsilon$  (  $\epsilon$  に サイズの穴を開ける、あるいは細さ  $\epsilon$  のハンドルを接合する 等が施されたものが  $\Omega_\epsilon$  ) が扱われ、  $\Omega$  上の固有値  $\mu(k, \Omega)$  について、  $\mu(k, \Omega_\epsilon)$  に対する精密な漸近挙動が得られている。特に申請者(神保)は近年領域が部分的に退化するより一般の

場合について、ラプラシアン(ノイマン境界条件)の固有値の漸近挙動に関して精密な解析を行った。その際、非共鳴型、共鳴型の特徴をもつクラスに固有値の挙動をうまく場合分けし、それぞれのクラスの固有値に対応する固有関数の精密な特徴付けを行った。これまでのラプラシアンに関する先行研究(音波に相当)において知られている領域変形に対する固有値の解析方法を活用して、工学上あるいはより現象に密接に関連する重要な波動(電磁気や弾性体)の振動現象の解析を考えたい。また、領域の特異的な特徴が漸近式等にどのように現れるのか、ベクトル値の波を扱うことでスカラー波に対応する先行研究とは異なった新しい側面が見えてくるのではないかと、という着想を得た。

### 2. 研究の目的

本研究の課題は上述した動機に基づき、特異的な領域変形と弾性体や電磁場の振動の方程式に現れる楕円型作用素の固有値の挙動について精密解析を与えたい。弾性体と電磁場の問題は双方ともベクトル値の未知関数をもち、固有値の特徴付けや固有関数のア priori 評価や近似解の構成等において技術的類似点もあり並列して研究を推進する。

[マックスウェル方程式の固有値問題]

[弾性体方程式の固有値問題]

それぞれにおいてラプラシアンの場合と同様な問題意識で代表的な2つのタイプのケースである、小さな穴(または欠陥)をもつ領域、および、細いハンドルをもつ領域などの場合に固有値の解析を行う。

研究の特徴: ベクトル値関数である固有関数にたいして特殊解や近似固有関数特殊解の構成において多項式近似法などの面白い代数的な計算を含んでいる。我々の研究課題における計算において未知関数に関し  $\text{div}$  の項が頻出して現れる。この点で流体方程式などの解析と関連する部分もある。あまり扱われないスリップ境界条件をもつ流体现象にも適用できる手法を得ることができるとは期待している。

### 3. 研究の方法

本研究テーマは申請者(神保)が長く取り組んできた領域変形と楕円型作用方程式の解の構造の関連の課題の延長線上の位置している。研究体制としては北大の2名の同僚と(本多, 利根川)の議論や協力を部分的に得ながら課題を探究してゆく。マックスウェルの方程式における作用素、弾性体方程式のラメ作用素の固有値を研究する。研究の流れや方法論は今まで取り組んできたラプラシアンなどのスカラーの作用素の場合と同様に近似解を構成すること、および、特異摂動問題の固有関数の評価や漸近挙動の特徴付けの方法論を用いて研究される。日本ではあまり同じテーマの研究者がいなかったため欧米の関連する研究も参考にし、今まで自分でこしらえた方法を加味してこのような"特異摂動"的な固有値問題を研究して

ゆく。マックスウェルの方程式における作用素，弾性体方程式のラメ作用素の双方について研究の流れや方法論は今まで取り組んできたラプラシアンやシュレディンガー作用素などスカラーの問題を扱う場合と同様に議論できる部分も多くある。その議論全体の枠組みについて述べる。(i) 特異摂動の状況における偏微分方程式(または固有方程式)の近似を高い精度で求める。特に境界条件を高精度で満たすよう，あるいは関数の滑らかさが良くなるように接合漸近展開の方法を用いる。(ii) レーリー商と近似固有関数解をもちいて真の固有値の見当をつける。固有値の上からの評価と同時に真の固有関数のある種のエネルギー評価を得る。(iii) 真の固有関数の評価およびその特異的部分における固有関数の挙動の精密な特徴付けを行う。(iv) 方程式を弱形式(積分形)の形に変形し近似固有関数を試験関数として積分形に Evaluate した上で極限をとることで固有値の摂動に関する漸近挙動をあぶり出す。この議論の流れは一般的に偏微分方程式の特異摂動型固有値問題において有効であると思われる。以上の過程において，多項式関数による近似固有関数の計算では本多，システムの楕円型方程式の解のアプリオリ評価については利根川が研究代表者(神保)と議論する。

#### 4. 研究成果

1. 正則および特異的な領域変形を施した際に起こる偏微分方程式の解やその特徴となる性質や量の摂動を研究した(ラメ作用素，ストークス作用素，等のスペクトル摂動問題)。システムの楕円型作用素(ラメ作用素，ストークス作用素，マックスウェル作用素など)のスペクトルの観点からの研究：(i) 弾性体の斉次方程式の多項式解，有理型の関数(本研究での用語)の解の構成および構造，特に次数毎の解空間の次元を決定した(本多氏，伊東氏と共同)。(ii) ストークス作用素の Hadamard 型変分公式を導いた(Dirichlet 条件の場合，牛越氏と共同)。スリップ境界条件の場合についても Hadamard 型変分公式の形式的導出を行った(牛越氏と共同)。マックスウェル作用素の固有値問題についても同じ結果を得た。(iii) 小さな穴の開いた領域上のラメ作用素およびマックスウェル作用素の固有値の摂動公式の研究を行った。摂動公式を得た。(iv) 細い棒を組み合わせた複合的弾性体の低周波固有振動の漸近研究を行い精密な漸近挙動を求めた。

2. 反応拡散方程式の研究：グラフ上の単独反応拡散方程式の時間全域解の存在および特徴を研究した。(i) 無限 Y 型グラフ上の熱核を明示的に計算した。それを活用して単独反応拡散方程式の時間全域解(無限の過去未来両方に亘る解)を構成した(高澤氏と共同)。これは直線上の同じ方程式の定常解がグラフになり空間対称性のやぶれに起因して波の進行が発生する現象である。非線型

項が一般になることで多種類の時間全域解が共存すると期待でき次の研究テーマを励起している。(ii) FitzHugh-Nagumo 方程式について定常解の安定性を解析するための汎関数を導入した。定常解の線型化固有値問題について，定常解と同一の停留点をもつ汎関数を導入し変分構造から固有値構造を特徴付けた。各定常解はこの汎関数の停留点に一致しさらに定常解の線型化スペクトルの符号は対応する停留点での 2 階変分ヘシアンのスペクトルのそれに一致することを示した(CN.Chen, 森田, 氏と共同)。

3. 複雑形状と静電ポテンシャルの研究：カントール集合に一樣配置された電荷が作る静電ポテンシャルに対する調和関数の特異性の特徴付けを行った(浜向氏と共同)。楕円型方程式の解の特異点の除去可能性について複雑形の集合や次元の観点からの結果を得た。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

1. S.Jimbo, K.Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, to appear in Indiana Univ. Math. J. 2016. 印刷中.(査読有)
2. S.Jimbo, E. Ushikoshi, Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions, Far East J. Math. Sci. 98 (2015), 713-739. (査読有)
3. S.Jimbo, Eigenvalues of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, J. Elliptic, Parabolic, Equations 1 (2015), 137-174. (査読有)
4. C.N.Chen, S.Jimbo, Y.Morita, Spectral comparison and gradient-like property in the Fitz-Nagumo type Equations, Nonlinearity 28 (2015), 1003-1016. (査読有)
5. N.Honda, T.Kawai, H.P.Stapp, On the geometric aspect of Sato's postulates on the S-matrix, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B52 (2015), 11-54. (査読有)
6. M. Mizuno, Y. Tonegawa, Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions, SIAM Journal on Mathematical Analysis 47 (2015), 1906-1932. (査読有)
7. N.Honda, J.McLaughlin, G.Nakamura, Conditional stability for single interior measurement, Inverse Problems, 30 (2014), 1-19. (査読有)
8. Y. Tonegawa, A second derivative Hölder estimate for weak mean curvature flow, Advances in Calculus of Variations 7,

- (2014), 91-138. (査読有)
9. K. Kasai, Y. Tonegawa, A general regularity theory for weak mean curvature flow, Calc. Var. Partial Differential Equations 50, (2014), 1-68. (査読有)
  10. S. Jimbo, Y. Morita, Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, J. Differential Equations 255 (2013), 1657-1683. (査読有)
  11. S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, 非線形偏微分方程式, 力学系およびその応用, 数理解講究録, 1881, 2014. (査読無)
  12. S. Jimbo, Hadamard variation and electromagnetic frequencies, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, R. Magnanini et al (eds.) INdAM series 2 (2013), 179-200, Springer. (査読有)
  13. N. Honda, L. Prelli, Multi-specialization and multi-asymptotic expansions, i, Advances in Mathematics, 232 (2013), 432-498. (査読有)
  14. T. Aoki, N. Honda, Y. Umeta, On a construction of general formal solutions for equations of the first Painleve hierarchy I, Advances in Mathematics, 235 (2013), 496-524. (査読有)
  15. N. Honda, G. Nakamura, M. Sini, Analytic extension and reconstruction of obstacles from few measurements for elliptic second order operators, Mathematische Annalen, 355 (2013), 401-427. (査読有)
  16. T. Aoki, N. Honda, Y. Umeta, On the number of the turning points of the second kind of the Noumi-Yamada systems with a large parameter, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B37 (2013), 1-30. (査読有)
- [学会発表](計 12 件)
1. 神保秀一, 特異的領域変形と固有値問題, パターン形成とダイナミクスの解構造の探求, 学術交流会館, 北海道大学, 北海道, 札幌市, 6/26-6/28, 2015
  2. S. Jimbo, Spectra of domains with a thin tubular hole, Colloquium, Department of Mathematics, Incheon, Inha University, Korea, 4/28, 2015.
  3. N. Honda, A generalization of multi-specializations and their associated asymptotics, D-modules and Singularities, Padova Univ., Padova, Italy, 9/15, 2015.
  4. S. Jimbo, Eigenvalues of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 2014 NCTS Workshop on Calculus of Variations and Related Topics,

- NCTS, National TsingHua University, Hsinchu, Taiwan, 10/29-10/31, 2014.
5. 神保秀一, Eigenvalues of 2nd order elliptic operators in a domain with a thin tubular hole, 日本数学会関数方程式分科会, 広島大学, 広島県, 東広島市, 9/25-9/28, 2014.
  6. S. Jimbo, Eigenvalues of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 8th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Hotel Serapo, Gaeta, Italy, 5/26-5/30, 2014.
  7. N. Honda, Pseudo-differential operators with an apparent parameter, Formal and Analytic Solutions of Functional Equations, Valladolid University, Valladolid, Spain, 9/3, 2014.
  8. 神保秀一, Eigenvalues of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 情報数理解話会, 東北大学, 10/10, 2013.
  9. 神保秀一, Eigenvalues of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 日本数学会応用数学分科会, 愛媛大学, 愛媛県, 松山市, 9/24-9/27, 2013.
  10. 神保秀一, Eigenvalues of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 岐阜大学工学部談話会, 岐阜県, 岐阜市, 8/9, 2013.
  11. S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, North Eastern Symposium on Mathematical Analysis, Tohoku University, 宮城県, 仙台市, 2/18-2/19, 2013.
  12. N. Honda, Multi-specializations and multi-microlocalizations, Recent trends in algebraic analysis, 2013, Feb., 21, Padova University, Padova, Italy.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

神保 秀一(JIMBO SHUICHI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 80201565

##### (2) 研究分担者

本多 尚文(HONDA NAOFUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 00238817

利根川 吉廣(TONEGAWA YOSHIHIRO)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号: 80296748

##### (3) 連携研究者 なし