

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400168

研究課題名(和文) 微分方程式系における多様な分岐構造の解明

研究課題名(英文) Investigation of Diverse Bifurcation Structures in Differential Dynamical Systems

研究代表者

矢ヶ崎 一幸 (Yagasaki, Kazuyuki)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：40200472

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：常微分方程式系あるいは偏微分方程式系で記述される力学系を取りあげ、分岐構造などこれらの系で起こる複雑な動的挙動を理論的に明らかにした。特に、偏微分方程式系のソリトン解の分岐や安定性、楕円型偏微分方程式の正值球対称解の存在の一意性や分岐、原子間顕微鏡のマイクロカンチレバーの制御、一般的な微分方程式系の非可積分性、周期的な摂動を受ける保存系および不規則摂動系のカオスについて議論した。また、対応した数値解析あるいは数値シミュレーションを行って理論結果を数値的かつ視覚的に確認した。

研究成果の概要(英文)：Dynamical systems described by ordinary and partial differential equations were considered and complicated behaviors such as bifurcation structures occurring in these systems were theoretically investigated. Especially, bifurcations and stability of solitary waves in partial differential equations, unique existence and bifurcations of radial symmetric, positive solutions in elliptic partial differential equations, control of microcantilevers in atomic force microscopy, nonintegrability of general differential equations, and chaos in periodic perturbations of conservative systems and random perturbed systems were discussed. Appropriate numerical analyses and simulations were also carried out to demonstrate these theoretical results numerically and graphically.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 偏微分方程式系 不規則摂動系 周期摂動系 区分的に滑らかな系 分岐 カオス 非可積分性

1. 研究開始当初の背景

力学系理論はカオス現象の再発見を契機として目覚しく発展し、微分方程式系で起こる非線形現象の理解は飛躍的に進み、さらに多様な分岐構造の存在が明らかにされつつある。

(1) 反転可能系やハミルトン系は対称性やシンプレティック性など特別な構造あるいは保存量を有し、力学、流体力学や光学など多くの応用分野においてしばしば有効かつ重要な数理モデルとして現れる。例えば、古典力学の三体問題は反転可能系およびハミルトン系の代表的なもののひとつである。最近、研究代表者は反転可能系に対して、対称周期軌道の1パラメータ族から有理数倍の周期をもつ分数調波軌道が発生する分岐についての単純な条件を与え、共鳴条件が成立するとき一般的にこのような分岐が起こることを示している。特に、その周期軌道族の周期がパラメータと共に変化する場合、共鳴条件を満たすパラメータは稠密に存在するので、分岐もそのような稠密なパラメータの値で起こることになる。

(2) 力学系理論は主として滑らかな系(微分可能系)を対象としているが、応用分野(特に、工学分野)では区分的にのみ滑らかな数理モデルがしばしば現れる。区分的に滑らかな系の代表例として、衝突運動を伴う質点・剛体力学系やスイッチング動作を伴う電気回路系などがあげられる。このような系に対する従来の数学的研究の多くでは、個々の分岐現象が個別に調べられ、解析の多くの部分は数値計算に依存するものである。また、工学分野では、本来滑らかな系に対してのみ適用可能な摂動法がこのような系に対して古くから用いられているが、このようなアプローチに対する数学的基礎付けが最近研究代表者によりなされている。

(3) 偏微分方程式系のパルス解やフロント解は強い関心を集め、それらの分岐に対しても多くの理論研究が行われているものの、なお未知の部分が数多く残されている。最近、研究代表者らは、常微分方程式のホモクリニック軌道に対応した連立非線形波動方程式のソリトン解の分岐が起こる条件を求める手法を提案している。しかしながら、ソリトン解の安定性については明らかにされていない。

2. 研究の目的

常微分方程式系あるいは偏微分方程式系で記述される力学系を取りあげ、従来の分岐理論では取り扱うことが困難である多様な分岐構造など、これらの系で起こる複雑な動的挙動を解明する。

(1) 以下のように、さまざまな偏微分方程式系の解の分岐に関する研究を行い、これらの系で起こる分岐現象を明らかにする。

空間に関して斉次的な、連立非線形波動方程式のソリトン解の分岐が起こるとき、そ

れに関連した分岐上の解の安定性を判定する理論を確立する。

無限遠で減衰するポテンシャルを有する無限次元ハミルトン系を取りあげ、ソリトン解の分岐が起こる条件を求め、関連した解の線形安定性を判定する理論を確立する。

あるクラスの楕円型偏微分方程式において、正值球対称解の存在およびその分岐現象を明らかにする。

(2) 応用の分野において、物質表面形状のナノレベルでの測定のため、原子間顕微鏡が広く用いられている。また、そのプローブであるマイクロカンチレバーの振動は、区分的に滑らかな微分方程式により精度良くモデル化できることが知られている。最近、研究代表者は外部フィードバック制御法によりその制御を行い、表面形状を高精度で測定できることを数値シミュレーションにより示しているが、本制御法を実機に適用するためには解決しなければならない問題が残されている。この問題を解決するため本制御法を改良し、適用した際にマイクロカンチレバーの振動において起こる分岐現象を明らかにする。

(3) 偏微分方程式系のパルス解やフロント解は常微分方程式のホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道に対応する場合があります。分岐の発生と可積分性の関連性も指摘されている。このような観点から、一般的な微分方程式系に対して、ホモ/ヘテロクリニック軌道近傍において系が非可積分であるための条件を明らかにする。

(4) 近年さまざまな分野で用いられている、ドローンに代表される遠隔操縦あるいは自律式のマルチコプターの力学的挙動は、保存系が摂動を受ける形の運動方程式によって記述される。そこで、保存系が周期的な摂動を受ける系の動的挙動、特にカオス挙動を解析する手法を確立する。

(5) 金融工学や気候予測など、応用分野では、不規則な(確率的な)摂動を受ける力学系としてモデル化することが適切であるさまざまな現象がある。そこで、不規則摂動を受ける系の動的挙動、特にカオス挙動を解析する手法の確立を目指す。

3. 研究の方法

常微分方程式系あるいは偏微分方程式系で記述される力学系を取りあげ、必要となる手法を新たに開発するなどして、分岐構造などこれらの系で起こる複雑な動的挙動を理論的に明らかにする。また、対応した数値解析あるいは数値シミュレーションを行って理論結果を数値的かつ視覚的に確認する。

(1) 以下のように、さまざまな偏微分方程式系の解の分岐に対して摂動的な方法を用いて理論的な取り扱いを行う。また、力学系理論に基づいた数値計算を、コンピュータソフトウェア AUTO を用いて行い、理論結果を数値的かつ視覚的に確認する。

連立非線形波動方程式のソリトン解の分岐に対して、それが起こる条件を、メルニコフの方法と呼ばれる大域的な摂動法を用いて理論的に求める。さらに、線形化方程式の固有値問題を解析して分枝上の解の安定性を判定する。

無限遠で減衰するポテンシャルを有する無限次元ハミルトン系のソリトン解に対して、メルニコフの方法と呼ばれる大域的な摂動法のアイデアを拡張して用いることにより、分岐が起こる条件を求める。さらに、線形化方程式の固有値問題を解析して分枝上の解の安定性を判定する。

あるクラスの楕円型偏微分方程式に関して、以下の方法により正值球対称解が一意的に存在することを証明する。まず、正值球対称解が満たす、特異点を有する常微分方程式系に対して、特異点を打ち消すような状態変数を導入し、各々が特異点と無限遠点を含む2つの力学系を構成する。偏微分方程式の正值球対称解が、これらの系の不変集合の不安定多様体と平衡点の中心安定多様体の交点に対応づけ、これらの不変多様体が横断的に交差し、その交差が一点のみであることを示す。

(2) 原子間顕微鏡のプローブであるマイクロカンチレバーを取りあげ、その振動波形がバイアスを有する正弦波に近いことを利用して、近似的に外部フィードバック制御法を適用する。その際に生じる分岐現象を、数値計算を援用することによって解析するとともに、数値シミュレーションを行ってこの結果の有効性を明らかにする。

(3) 一般的な微分方程式系に対して、モラレス・ラミス理論を適用し、ホモ/ヘテロクリニック軌道近傍において有理型関数的に非可積分であるための十分条件を与える。得られた理論結果を、定常非圧縮性流体の流れを記述する3次元体積保存系に適用し、その有用性を確認する。

(4) 保存系が周期的な摂動を受ける系に対して、メルニコフの方法を拡張し、周期軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差し、カオス挙動が起こる条件を求める。本手法を、4つの回転翼を有するヘリコプターのモデルを表す、周期外力の作用する剛体の運動方程式に適用し、安定および不安定多様体やヘテロクリニック軌道の数値計算を行って、理論結果の有用性を示す。

(5) 不規則摂動を受ける系に対して、確率過程に関する結果を用いてメルニコフの方法を拡張し、カオス挙動が起こる条件を求める。本手法を2次元ダuffing系に適用し、安定および不安定多様体の数値計算を行うなどして、その有用性を確認する。

4. 研究成果

常微分方程式系あるいは偏微分方程式系で記述される力学系を取りあげ、分岐構造などこれらの系で起こる複雑な動的挙動を理

論的に明らかにした。また、対応した数値解析あるいは数値シミュレーションを行って理論結果を数値的かつ視覚的に確認した。

(1) 以下のように、偏微分方程式系の解の分岐に関する研究を行い、これらの系で起こる分岐現象を明らかにした。また、数値計算を行い、理論結果を数値的かつ視覚的に確認した。

連立非線形波動方程式のソリトン解に対して、ピッチフォーク分岐が起こる条件を理論的に求め、分枝上の解の安定性を判定する手法を確立した。本手法を連立非線形シュレディンガー方程式に適用し、その有用性を明らかにした。

無限遠で減衰するポテンシャルを有する無限次元ハミルトン系のソリトン解に対して、サドル・ノードおよびピッチフォーク分岐が起こる条件を求め、分枝上の解の安定性を判定する手法を確立した。本手法を非線形シュレディンガー方程式に適用し、その有用性を明らかにした。

あるクラスの楕円型偏微分方程式に対して、正值球対称解が一意的に存在することを証明した。さらに、力学系理論に基づいた数値計算を行い、理論結果を確認するとともに、方程式のパラメータの値が理論の適用範囲外となる場合にはサドル・ノード分岐およびカusp分岐の起こることを数値的に示した。

(2) 外部フィードバック制御法を改良し、実機への応用が容易な、概外部フィードバック制御法を提案した。さらに、原子間顕微鏡のプローブであるマイクロカンチレバーに対して概外部フィードバック制御法を適用した際に生じる分岐現象を、数値計算を援用することによって解析し、数値シミュレーションを行って本制御法の有効性を明らかにした。

(3) 一般的な微分方程式系に対して、ホモ/ヘテロクリニック軌道近傍において有理型関数的な非可積分性であるための十分条件を与えた。得られた理論結果を、定常非圧縮性流体の流れを記述する3次元体積保存系に対して適用し、その有用性を確認した。

(4) 保存系が周期的な摂動を受ける系に対して、カオス軌道が存在するための十分条件を求めるための手法を新たに提案した。本手法を、周期外力の作用する剛体の運動方程式に適用し、安定および不安定多様体やヘテロクリニック軌道の数値計算を行って、理論結果の有用性を示した。

(5) 不規則摂動を受ける系に対して、カオス軌道が存在するための十分条件を与えた。得られた理論結果を2次元ダuffing系に適用し、安定および不安定多様体の数値計算を行って、その有用性を確認した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 9 件)

Kazuyuki Yagasaki, Shogo Yamanaka, Nonintegrability of dynamical systems with homo- and heteroclinic orbits, Journal of Differential Equations, Vol. 263, 2017, 1009 - 1027.

Kazuyuki Yagasaki, Rough external feedback control of microcantilevers in atomic force microscopy, Nonlinear Dynamics, Vol. 87, 2017, 2335-2343.

Mitsuru Shibayama, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, Vol. 37, 2017, 2705-2715.

Hidekazu Ito, Some remarks on integrability and normal forms for vector fields, RIMS Kokyuroku Bessatsu, Vol. B57, 2016, 249-264.

Milovan Suvakov, Mitsuru Shibayama, Three topologically nontrivial choreographic motions of three bodies, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 124, 2016, 155-162.

Kazuyuki Yagasaki, Chaos in randomly perturbed dynamical systems, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1942, 2015, 98-104.

Mitsuru Shibayama, Minimax approach to the n-body problem, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Advanced Studies in Pure Mathematics Vol. 64, 2015, 221-228.

Kazuyuki Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits in reversible systems, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Advanced Studies in Pure Mathematics Vol. 64, 2015, 229-234.

Mitsuru Shibayama, Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 214, 2014, 77-98.

〔学会発表〕(計 3 8 件)

矢ヶ崎一幸, 山添祥太郎, 無限次元 Hamilton 系における定常解の分岐と非線形 Schrodinger 方程式への応用, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京(東京都・八王子市).

矢ヶ崎一幸, 周期的な摂動を受ける保存系のヘテロクリニック挙動, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016 年 9 月 17 日, 関西大学(大阪府・吹田市).

矢ヶ崎一幸, 山添祥太郎, 連立非線形 Schrodinger 方程式における孤立波解のピッチフォーク分岐と線形安定性, 2016 年 9 月 17 日, 関西大学(大阪府・吹田市).

山中祥五, 矢ヶ崎一幸, ホモ/ヘテロクリニック軌道を有する一般的な微分方程式系の非可積分性, 2016 年 9 月 15 日, 関西大学(大阪府・吹田市).

Mitsuru Shibayama, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, 2016 年 7 月 3 日, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando (USA).

Kazuyuki Yagasaki, Melnikov processes and chaos in randomly perturbed dynamical systems, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, 2016 年 7 月 4 日, Differential Equations and Applications, Orlando (USA).

Hidekazu Ito, Poincare center problem and normal form theory of vector fields, 97th Encounter between Mathematicians and Theoretical Physicists "Around Poincare", 2016 年 6 月 2 日, Strasbourg (France).

矢ヶ崎一幸, ハミルトン系の非可積分性とカオス, 第 30 回計算数理工学フォーラム, 2016 年 3 月 18 日, 京都大学(京都府・京都市).

柴山允瑠, n 体問題の周期軌道の変分解析, 日本数学会 2016 年度年会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学(茨城県・つくば市).

矢ヶ崎一幸, 原子間力顕微鏡におけるマイクロカンチレバーの概外部フィードバック制御, 日本応用数理学会 2015 年度年会, 2015 年 9 月 9 日, 金沢大学(石川県・金沢市).

Hidekazu Ito, Integrable and super-integrable vector fields and their normal forms at equilibria, Dynamics, Topology and Computations, 2015 年 6 月 17 日, Bedlewo (Poland).

Kazuyuki Yagasaki, Melnikov Processes and Chaos in Randomly Perturbed Dynamical Systems, 2015 NCTS Workshop on Dynamical Systems, 2015 年 5 月 22 日, Taipei (Taiwan).

矢ヶ崎一幸, 楕円型方程式の正值球対称解の存在と分岐, 日本数学会 2014 年度年会, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学駿河台キャンパス(東京都・千代田区).

矢ヶ崎一幸, Existence and uniqueness of positive radial solutions to a class of semilinear elliptic equations in R^d with $d \geq 2$, 2014 年度冬の力学系研究集会, 2015 年 1 月 10 日, 日本大学軽井沢研修所(長野県・軽井沢町).

Kazuyuki Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits in reversible systems, International Conference on Algebraic Methods in Dynamical Systems AMDS 2014, 2014 年 10 月 7 日, Barranquilla (Colombia).

柴山允瑠, 特異点のプロアアップによるハミルトン系の可積分性の判定, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 18 日, 学習院大

学(東京都・).

矢ヶ崎一幸, 不規則摂動系におけるカオス, 第10回日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2014年3月20日, 京都大学(京都府・京都市).

Kazuyuki Yagasaki, Melnikov processes and chaos in randomly perturbed dynamical systems, RIMS Conference/The 6th CREST-SBM International Conference New Directions in Applied Dynamical Systems, 2014年3月10日, 京都大学(京都府・京都市).

Kazuyuki Yagasaki, Bifurcation diagram for interior single-peak solutions in a Neumann problem for $u'' - u + u^p = 0$ with $p \in \mathbb{R}$ and $p > 1$, RIMS Workshop Progress in Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, 2013年11月20日, 京都大学(京都府・京都市).

矢ヶ崎一幸, $u'' + (-u + u^p) = 0$ ($p > 1$ は実数) の Neumann 問題における内部単一ピーク解の分岐ダイアグラム, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学(愛媛県・松山市).

²¹ Mitsuru Shibayama, Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, The Asian Mathematical Conference 2013, 2013年7月1日, Busan (Korea).

²² Kazuyuki Yagasaki, Application of the Subharmonic Melnikov Method to Piece-wise Smooth Systems, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, 2013年5月21日, Snowbird (USA).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

矢ヶ崎 一幸 (YAGASAKI KAZUYUKI)
京都大学・情報学系・教授
研究者番号: 40200472

(2) 研究分担者

伊藤 秀一 (ITO Hidekazu)
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号: 90159905

柴山 允瑠 (SHIBAYAMA Mitsuru)
京都大学・情報学系・准教授
研究者番号: 40467444