

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400183

研究課題名(和文) 波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の研究

研究課題名(英文) Research on Schroedinger equations by wave packet transform

研究代表者

加藤 圭一 (Kato, Keiichi)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：50224499

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者らの研究による波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の解の表現を用いて、シュレーディンガー方程式の解の性質を調べた。具体的には、増大度が2次より小さい時間に依存するポテンシャルおよび調和振動子に2次より小さいポテンシャルを加えた場合にシュレーディンガー方程式の解の特異性を初期データで特徴付けた。

また、シュレーディンガー方程式において、ポテンシャルが時間に依存する場合に、波動作用素の存在と完全性の問題を波束変換を用いる方法で考察した。ポテンシャルが短距離型すなわち空間遠方で小さい場合に波動作用素の存在と完全性を示した。

研究成果の概要(英文)：By using the representation of solutions to Schroedinger equations in terms of wave packet transform given by the representative of this research project and the co-workers, the representative and the co-workers has studied properties of solutions to Schroedinger equations. More precisely, we have characterize singularities to Schroedinger equations with time dependent sub-quadratic potentials and for perturbed harmonic oscillator in terms of information of initial data.

We have studied existence and completeness of wave operators for Schroedinger equations with time dependent potentials. We have shown existence and completeness of wave operator for Schroedinger equations with time dependent shortrange potentials.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：波束変換 Wave packet transform Schroedinger equation Modulation space Wave front set Harmonic oscillator

## 1. 研究開始当初の背景

2010年6月に、本研究代表者は、時間に依存する波束をうまくとれば、波束変換を用いてシュレーディンガー方程式が一階の偏微分方程式に変換できることに気がついた([12])。この一階の方程式は簡単に解くことができ、波束変換によるシュレーディンガー方程式の解の表現を得た。研究開始当初の2012年4月には、自由粒子の場合および調和振動子の場合に、波束変換による解の表現を用いて、以下のことがわかっていた。

1. 時間が経った解の波面集合を時刻0のデータで特徴付けること([11])。
2. 変調空間(Modulation space)での解の有界性([12])

波束変換は、A. Córdoba and C. Fefferman([78])により導入されており、H. G. Feichtinger([01])により、それまでの結果がまとめられているが、時間に依存した波束をうまくとるという方法はそれまでになかった([02])では、短時間フーリエ変換と呼んでいる。

### 文献表

[78] A. Córdoba and C. Fefferman, Wave packets and Fourier integral operators, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), pp. 979–1005.

[01] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, 2001.

[11] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J.Math 47 (2011), pp. 175–183.

[12] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. 64 (2012), pp. 223–231.

## 2. 研究の目的

(1) 研究の目的 本研究の目的は、波束変換を用いた解の表現を使って、次のことを示すことである。

- 波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の解の表現を用いて、ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解の波面集合を初期データにより特徴付けること。
- 波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の解の表現を用いて、解の変調空間上の評価を行うこと。
- 波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の解の表現を用いて、ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式に対する波動作用素の存在および完全性を示すこと。

## 3. 研究の方法

### (1) 研究の方法の概要

本研究は、研究代表者、連携研究者の小林政晴(北海道大)、伊藤真吾(北里大)の共同研究が中心である。そのため、以下の方法で研究を行った。

- 研究代表者と連携研究者の2人が、メールで連絡し合った後、必要があれば、直接あうことにより共同研究を進めた。
- 研究代表者と連携研究者の2人が、研究会や学会の折に、研究連絡を行った。
- 国内外の研究会に出席し、研究活動に必要な情報を得た。
- 国内外の研究会で、得られた結果を発表した。

### (2) 招聘と出張の状況

出張の経過は以下の通りである。

2013年度 本年度は、情報収集および研究打合せの目的で、京都大学へ2回、北海道大学、大阪大学、九州大学へ出張した。成果発表の目的で、国内外へ出張した(学会発表の項参照)。また、函館みらい大学の高村博之氏、山形大学の佐野隆志氏、神戸大学の岡田遼氏を招聘し、講演をお願いした。「箱根における偏微分方程式研究会」を主催し、講演および研究連絡を行った。

2014年度 本年度は、情報収集および研究打合せの目的で、京都大学、大阪大学、北海道大学、メキシコ・メキシコ自由大学モレーリア校へ出張した。8月には、韓国ソウルで行われた国際数学者会議に出席した。成果発表の目的で、国内外へ出張した(学会発表の項参照)。また、山口大学の広澤史彦氏、追手門大学の石田敦英氏を招聘し、講演をお願いした。「箱根における偏微分方程式研究会」を主催し、講演および研究連絡を行った。

2015年度 本年度は、情報収集および研究打合せの目的で、京都大学、大阪大学、北海道大学、城崎で行われた「2015年度偏微分方程式集中セミナー」、メキシコ・メキシコ自由大学モレーリア校へ出張した。成果発表の目的で、国内外へ出張した(学会発表の項参照)。

## 4. 研究成果

### (1) 主な成果

主な研究成果は以下の通りである。

- 定数係数の波動方程式に対して、特異性伝播の定理(波面集合の決定)を波束変換を用いて行った([2])。

- 2次以下の増大度をもつ時間に依存するポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に対し、解の変調空間上の評価を行った ([3]).
- 増大度が2次より小さい時間に依存するポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式に対し、波束変換を用いて、解の波面集合を初期データから特徴付けた ([7]).
- 波面集合の波束変換による特徴付けの精密化を行った ([8]).

## (2) 成果の国内外での位置付けと impact

時間に依存する波束を用いる研究は、Tataru らによっても行われているが、時間に依存する波束をうまく利用して、時間1階空間2階の偏微分方程式を1階の偏微分方程式に変換し、解の性質を調べる方法は、研究代表者らが独自に開発したものである。

シュレーディンガー方程式の解の波面集合を調べる問題は、東京大の中村周氏や Wunsch 氏により調べられているが、波束変換を用いた方法は、研究代表者らによるオリジナルな研究であり、時間に依存するポテンシャルを同じように扱えるところに我々の方法の利点がある。

この方法の解の表現を用いて、変調空間上の評価を行う方法は、研究代表者らによる独自の研究で、Cordero らの方法に比べて、証明が簡明になっている。

## (3) 今後の展望

本研究の方法は、変換した1階の方程式を解く際に、対応する古典軌道が現れることから、物理的に自然な方法と考えられる。そのため、今後の研究発展の可能性が大きいと思われる。直近の目標は以下の通りである。

- 時間に依存する長距離型のポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に対し、修正波動作用素を波束変換を用いて定義し、定義した修正波動作用素の存在と完全性を証明すること。
- ポテンシャルの増大度が2次より大きい場合に、基本解は至る所で滑らかでないと予想されている(1次元の場合は、谷島賢二氏により解決済み)。このことを我々の解の表現を用いて示すこと。

## 5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(8件)

- [1] K. Kato and Y. Sugiyama : Blow up of solution to the second sound equation in one space dimension , *Kyushu J. Math.* , 査読有, **67**:1(2013), 129–142, [https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/67/1/67\\_129/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/67/1/67_129/_article)
- [2] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito: Characterization of wave front sets in Fourier-Lebesgue spaces and its application , *Funkcial. Ekvac.* , 査読有, **56**:1(2013), 1–17, [https://www.jstage.jst.go.jp/article/fesi/56/1/56\\_1/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/fesi/56/1/56_1/_article).
- [3] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito: Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials , *J. Funct. Anal.* , 査読有, **266**:2(2014), 733–753, DOI:10.1016/j.jfa.2013.08.017.
- [4] Y. Yamamoto, Y. Sugiyama and K. Kato: Existence and analyticity of solutions to the drift-diffusion equation with critical dissipation , *Hiroshima Math. J.* , 査読有, **44**:3(2014), 275–313 <http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1419619748>
- [5] K. Kato and S. Ito: Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential , *SUT J. Math.* , 査読有, **50**:2(2014), 383–398 <http://www3.ma.kagu.tus.ac.jp/sutjmath/pg22.html>
- [6] Y. Yamamoto, Y. Sugiyama and K. Kato : Local and global solvability and blow up for the drift-diffusion equation with the fractional dissipation in the critical space , *J. Differential Equations* , 査読有, **258**:9(2015), 2983–3010, DOI:10.1016/j.jde.2014.12.033
- [7] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito: Wave front set defined by wave packet transform and its application , *Adv. Stud. Pure Math.* , 査読有, **64**(2015), 417–425
- [8] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito: Remark on characterization of wave front set by wave packet transform, <http://arxiv.org/abs/1408.1370> (2014) 査読なし。

## 【学会発表】(15件)

- ① 2013年5月17日「波束変換のシュレーディンガー方程式への応用」大阪大学微分方程式セミナー 大阪大学理学部(大阪府・豊中市)発表者:加藤圭一
- ② 2013年5月31日「波束変換を用いたソボレフ型

- 波面集合の特徴付けとその周辺」作用素論セミナー  
京都大学（京都府・京都市）発表者：伊藤真吾
- ③ 2013年12月13日「Application of wave packet transformation to time-dependent Schrödinger equation」京都大学数理解析研究所研究集会「スペクトル散乱理論とその周辺」京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）発表者：加藤圭一
- ④ 2013年12月22日「Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials」日本数学会関数方程式論分科会「微分方程式の総合的研究」東京大学大学院数理科学研究科（東京都・目黒区）発表者：伊藤真吾
- ⑤ 2014年1月10日「Wave packet transform and its application to time dependent Schrödinger equations」東京工業大学非線形解析セミナー@大岡山 東京工業大学（東京都・目黒区）発表者：加藤圭一
- ⑥ 2014年3月11日「Modulation spaces and Schrödinger equations」第6回名古屋微分方程式研究集会, 名古屋大学, (愛知県・名古屋市) 発表者：小林政晴
- ⑦ 2014年3月27日「Wave packet transform and its application to PDE」Harmonic analysis for nonlinear problems in UCSB Santa Barbara (U.S.A.) 発表者：加藤圭一
- ⑧ 2014年10月17日「波束変換の偏微分方程式への応用 (PartI) および (PartII)」第4回室蘭非線形解析研究会 室蘭工業大学 (北海道・室蘭) 発表者：加藤圭一
- ⑨ 2014年7月13日「Modulation spaces and Schrödinger equations」2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, 中華人民共和国, 牡丹江師範学院, 発表者：小林政晴
- ⑩ 2014年7月26日「波束変換による波面集合の特徴付けについて」第126回神楽坂解析セミナー 東京理科大学（東京都・新宿区）発表者：伊藤真吾
- ⑪ 2014年12月1日「波束変換とその偏微分方程式への応用」大阪大学理部数学科談話会 大阪大学理学部（大阪府・豊中市）発表者：加藤圭一
- ⑫ 2014年12月5日「波束変換と偏微分方程式の解の特異性」大阪大学微分方程式セミナー 大阪大学大学院理学研究科（大阪府・豊中市）発表者：加藤圭一
- ⑬ 2015年1月14日「波束変換とシュレーディンガー方程式の解の特異性」第1回解析学の耳袋（静岡県・沼津市）発表者：加藤圭一
- ⑭ 2015年3月3日 Wave packet transform and its

- application to Schrödinger operators」第7回名古屋微分方程式研究集会 名古屋大学大学院多元数理研究科（愛知県・名古屋市）発表者：加藤圭一
- ⑮ 2015年3月14日「Wave packet transform and Schrödinger equations with time dependent potentials」Workshop on nonlinear partial differential equations 浙江大学 杭州（中国）発表者：加藤圭一
- ⑯ 2015年7月7日「Wave packet transform and its application to partial differential equations」Nonlinear PDE meeting at Yanbian University 延吉（中国）発表者：加藤圭一
- ⑰ 2015年7月7日「Modulation spaces and Schrödinger equations」調和解析と非線形偏微分方程式, 京都大学数理解析研究所発表者：小林政晴
- ⑱ 2015年8月4日「Modulation spaces and Schrödinger equations」The 10th International ISAAC congress, 中華人民共和国マカオ特別行政区, 澳門大学, 発表者：小林政晴
- ⑲ 2015年9月3日「波束変換による波面集合の特徴付けについて」第54回実函数論・函数解析学合同シンポジウム 神奈川大学（神奈川県・横浜市）発表者：伊藤真吾
- ⑳ 2015年10月14日「Modulation spaces and Schrödinger equations」Algebraic analysis and related topics, 北海道大学（北海道札幌市）発表者：小林政晴
- ㉑ 2016年2月5日「波束変換の分散型方程式への応用」松山解析セミナー2016 愛媛大学理学部（愛媛県・松山市）発表者：加藤圭一
- ㉒ 2016年3月25日「Wave packet transform and singularities of solutions to Schrödinger equations」International conference on partial differential equations 金華（中国）発表者：加藤圭一

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

加藤 圭一 (Keiichi Kato)  
東京理科大学・理学部第一部・教授  
研究者番号：50224499

### (2) 連携研究者

伊藤 真吾 (Shingo Ito)  
北里大学・一般教育・教授  
研究者番号：40548145

小林 政晴 (Masaharu Kobayashi)  
北海道大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：30516480