

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400246

研究課題名(和文) M理論による双対性と可解性の導出

研究課題名(英文) Derivation of duality and integrability from M-theory

研究代表者

松尾 泰 (Matsuo, Yutaka)

東京大学・大学院理学系研究科(理学部)・准教授

研究者番号：50202320

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：一つの物理系に対して見かけ上異なる記述法が同等になることを双対性と呼ぶ。双対性を用いると複眼的に物理系をとらえることができるので理論的に調べられる範囲が大幅に広がる。一方で双対性を厳密な意味で証明することは一般的には難しい。この研究ではゲージ理論と呼ばれる素粒子の基礎理論に関する双対性を、量子変形された無限次元対称性を用いて厳密に記述する方法を開発した。また、幾何学的な記述に対してもある程度の知見が得られた。

研究成果の概要(英文)：Sometimes, one physical system has some apparently different descriptions. Such property is referred to as duality. While it is beneficial to extend the methods to study the system, it is hard to derive it rigorously. In this study, I explore the duality in the gauge theory which is essential to describe the elemental particle physics. I found that a q-deformed infinite dimensional symmetry plays a unique role to explain it and explored its properties. Also, I developed a geometrical method to define the duality in M-theory.

研究分野：素粒子論

キーワード：ストリング理論 ゲージ理論 双対性 可解模型 量子変形 Gerbe 表現論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 超対称ゲージ理論やストリング理論の顕著な性質の一つとして双対性の存在があげられる。双対性を組み込んだストリング理論の定式化は M 理論と呼ばれているが、その定式化には不備な点が多かった。とくに、M 理論の基礎的な励起の一つである M5 プレーンは自己双対場で記述されているためラグランジアンで記述できるか、さらには非可換ゲージ対称性を導入できるかなど多くの不明な点が存在していた。

(2) 一方で、M5 プレーンをコンパクト化してできる 4 次元理論にはインスタントン分配関数に 2 次元共形対称性という無限次元の対称性を持つことが予想されていた。この予想を証明しさらに対称性の詳しい性質を調べれば双対性についての新しい知見が得られるのではないかという期待があった。

## 2. 研究の目的

上記の問題を幾何学と代数学という二面的なアプローチで解決しようというのが本研究の目的である。まず M5 プレーンの非可換ゲージ対称性を記述する非可換 gerbe と呼ばれる新たな数学的な構造を導入、超対称性と矛盾を起こさないような定式化を与え、それからゲージ理論などに現れる双対性について知見を得ようと考えた。一方で 6 次元をコンパクト化した 4 次元理論に現れる無限次元対称性の研究を推進して、代数的な立場で双対性を理解することも可能と考えられた。こちらのアプローチでは無限次元代数の内部構造として双対性を導入することができるか調べようと考えた。

## 3. 研究の方法

幾何学的なアプローチでは上記でも述べている非可換 gerbe, higher geometry という手法を用いる。これらは現時点では未開な部分も多いので、それらについての数学的な研究を進めた。

一方、代数的なアプローチでは、量子化された無限次元代数の表現論や、可解統計模型の手法を用いて、ゲージ理論やストリング理論の位相的な性質を調べることが主な研究方針となった。実際、研究を進めると、こちらのアプローチのほうが過去に行われた研究の蓄積をより多く用いることができることが理解され、研究の主軸はこちらに置かれることになった。

## 4. 研究成果

この 5 年間は主に 2 番目の方向性、すなわち対称性を用いた研究に主軸をおき研究を推進した。

まず論文[13]において 4 次元インスタントン分配関数の持っている対称性を Virasoro 代数や  $W$  代数などの既存のものからそれらを含む普遍的な代数に置き換えた。この代数は数学者の Schiffmann と

Vasserot (SV) が開発したものであるが、我々も instanton 分配関数の解析を通じて独立に発見した。この普遍的な代数を用いると SV が証明した pure super Yang-Mills 以外のより複雑な系についても対称性が適用できることを発見した。対称性は分配関数に対する再帰方程式として実現されることを示した。特に bifundamental hyper multiplet と呼ばれる物質を導入したモデルにおける対称性の証明を行った。

論文[11]では SV が行った証明法を拡張し、fundamental multiplet が入るような系に対する Gaiotto 状態と呼ばれる Coherent 状態を構成した。ここで用いられた方法は後により一般的な場合に拡張される。[11][13]の結果、ほとんどすべての超対称ゲージ理論について SV の普遍代数  $SHc$  が適用可能であることが理解された。

論文[8]では量子場の自由度を格子点に載せた可解模型について考察した。このような模型は Maulik-Okounkov (MO) により初めて導入されたものであり、いくつかの格子点の自由度を可解な構造を維持したまま結びつけることにより  $W$  代数の構造が現れることが示されていた。この論文ではこの模型に超対称性を導入し、対応する超対称  $W$  代数の構成を行った。この研究は  $SHc$  代数と可解模型の対応関係の基礎を与えるものである。

論文[7]では  $SHc$  の Triality について研究を進めた。Triality とは共形場理論が含む 2 つのパラメータに関する  $S_3$  対称性であり、 $W$  無限代数でその存在が示されているものである。 $SHc$  代数は見かけ上  $W$  無限代数とは大きく異なるためこの対称性の存在は  $W$  代数と  $SHc$  代数の同等性を示す上で本質的であった。Triality は minimal 模型と呼ばれる可解な系では Level-Rank 双対性に帰着する。 $SHc$  代数の表現を用いてこの性質がどのように実現されているのかを詳細に調べた。研究の途上で POSET に対する指標公式や Rogers-Ramanujan 関係式との関係などが副産物として得られた。

論文[6]では[11][13]で得られた知見を総括して Gaiotto 状態、頂点演算子、fundamental multiplet を導入する演算子などを系統的に導入し、広いクラスの超対称ゲージ理論に対して共形場理論との対応を見通しの良い形で証明した。それと同時にこれらの模型で特徴的に現れる幾何学的な構造である Seiberg-Witten 曲線の量子版 (Nekrasov により qq-character と呼ばれた) の導出を表現論的な観点から行った。これによりこれまでインスタントン分配関数を解析する代数的な手法であった  $SHc$  代数が幾何学的な応用も明らかになった。

論文[4]では論文[6]で行われた解析を  $SHc$  代数の量子変形されたバージョンである DIM に拡張した。対応するゲージ理論は 5 次元で定義される。この場合、代数自体が  $SL(2, Z)$  自己同型を持ち、より対称な構造を持つ。ゲ

ージ理論のプレーン構成と対応させると  $SL(2, Z)$  はストリング理論の双対性を記述するものと同じ視できることがわかる。この対応をより明確に示したのが論文[3]であり、栗田・Feigin・白石 intertwiner と呼ばれる頂点演算子を組み合わせることでプレーンの配位の構成を行い、そこでの DIM 代数の役割を明らかにした。また、Gaiotto 状態や vertex 演算子などの AFS 演算子による構成を行い、qq-character の導出法をより洗練されたものにした。

論文[2]は論文[8]でおこなった SHc 代数に対する可解構造の解析を DIM の場合に拡張した。

論文[1]ではこれまで A 型のゲージ群、quiver 図で行っていた解析をその他のリー群に対して拡張するための新たな仕組みを導入した。これは Reflection 状態と呼ばれるもので共形場理論の境界状態に対応するものである。

以上、代数的な解析については Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想の証明に関連してゲージ理論に普遍的に現れる構造として、SHc 代数とその量子変形である DIM 代数を提案し、M 理論の双対性がどのように機能しているのか、基礎的なレベルから数学的に厳密に明らかにすることができた。

一方、幾何学的なアプローチについては以下のような進展を行った。

まず、論文[12]では M5 プレーンなどで特徴的に現れる自己双対場のラグランジアンと経路積分の関係について詳しく調べた。自己双対場のラグランジアン定式化の問題点は境界条件を適切に設定できない点である。この問題を解決するためにより簡単な 2 次元モデルに対して、境界条件の足し上げをどのように行えばよいのかが明らかになった。

次に論文[10]で M5 プレーンの自己双対場の作用を超対称化した。これにより、一旦は M5 プレーンの定式化は完成したはずであったが、実際に目標にしていた双対性については明白な形に書くことはできなかった。このような困難について、直ちに対応することはできなかったため、別の視点である代数的な解決に研究の中心を移ることになった。

最後に論文[5]は M2 プレーンの定式化における南部かっこ式の応用についてのレビュー論文である。これまで行ってきた研究をまとめたものである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

[1] E. Bourguine, M. Fukuda, Y. Matsuo and R. D. Zhu, "Reflection states in Ding-Iohara-Miki algebra and brane-web for D-type quiver," JHEP 1712 (2017) 015.

[2] M. Fukuda, K. Harada, Y. Matsuo and R. D. Zhu, "Maulik-Okounkov's R-matrix from Ding-Iohara-Miki algebra," PTEP 2017, no. 9, 093A01 (2017).

[3] J. E. Bourguine, M. Fukuda, K. Harada, Y. Matsuo and R. D. Zhu, "(p,q)-webs of DIM representations, 5d N=1 instanton partition functions and qq-characters," JHEP 1711 (2017) 034.

[4] J. E. Bourguine, M. Fukuda, Y. Matsuo, H. Zhang and R. D. Zhu, "Coherent states in quantum  $W(1+\infty)$  algebra and qq-character for 5d Super Yang-Mills," PTEP 2016, no. 12, 123B05 (2016).

[5] P. M. Ho and Y. Matsuo, "The Nambu bracket and M-theory," PTEP 2016, no. 6, 06A104 (2016).

[6] J. E. Bourguine, Y. Matsuo and H. Zhang, "Holomorphic field realization of SHc and quantum geometry of quiver gauge theories," JHEP 1604, 167 (2016).

[7] M. Fukuda, S. Nakamura, Y. Matsuo and R. D. Zhu, "SHc realization of minimal model CFT: triality, poset and Burge condition," JHEP 1511, 168 (2015).

[8] R. D. Zhu and Y. Matsuo, "Yangian associated with 2D N = 1 SCFT," PTEP 2015, no. 9, 093A01 (2015).

[9] S. Nakamura, F. Okazawa and Y. Matsuo, "Recursive method for the Nekrasov partition function for classical Lie groups," PTEP, no. 3, 033B01 (2015).

[10] P. M. Ho and Y. Matsuo, "Aspects of Effective Theory for Multiple M5-Branes Compactified On Circle," JHEP 1412, 154 (2014).

[11] Y. Matsuo, C. Rim and H. Zhang, "Construction of Gaiotto states with fundamental multiplets through Degenerate DAHA," JHEP 1409, 028 (2014).

[12] W. M. Chen, P. M. Ho, H. c. Kao, F. S. Khoo and Y. Matsuo, "Partition function of a chiral boson on a 2-torus from the Floreanini-Jackiw Lagrangian," PTEP 2014, no. 3, 033B02 (2014).

[13] S. Kanno, Y. Matsuo and H. Zhang, "Extended Conformal Symmetry and Recursion Formulae for Nekrasov Partition Function," JHEP 1308, 028 (2013).

[学会発表](計 15 件)

下記のものは国際研究会における招待講演のみ。国内学会や大学でのセミナーなどは省いてある。

[1] Y. Matsuo, "Quantum toroidal symmetry and  $SL(2, Z)$  covariant description of AGT and qq-character", workshop "Integrability in low-dimensional quantum systems", Credwick, Australia June 26-July 21, 2017.

[2] Yutaka Matsuo, “Description of (p, q)-brane web from q-deformed toroidal symmetry”, The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries, Prague, June 6-10, 2017

[3] Yutaka Matsuo, “Quantum deformation of W1 and quantum geometry of quiver gauge Theories”, workshop “Classical and quantum integrable systems and supersymmetry”, Tajin, September 19- 24, 2016.

[4] Yutaka Matsuo, “Toroidal symmetry and duality in string theory”, in a workshop “String and M- theory in Okinawa”, OIST, March 6-9, 2016.

[5] Yutaka Matsuo, “Brane web and DIM algebra-Description of duality and qq-character”, in a workshop “Progress in Quantum Field Theory and String Theory II”, Osaka City University, March 27-31, 2017.

[6] Yutaka Matsuo, “Supersymmetric gauge theories and the duality of q-deformed W1 algebra”, workshop “AGT の物理と数学”, 中央大学, 2016 年 10 月 28-29 日. (数学者との共同研究会)

[7] Y. Matsuo, “SHc and W-algebra level-rank duality, minimal model and poset”, Workshop “Quantum Geometry, Duality and Matrix model”, Moscow 24-30 August 2016

[8] Y. Matsuo, “Holomorphic field realization of SHc and quantum geometry of quiver gauge theories”, Workshop “Higher structures in String Theory and M-Theory” Tohoku University, March 7-11, 2016

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松尾 泰 (Yutaka Matsuo)

東京大学・大学院理学系研究科・准教授

研究者番号：50202320

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし