

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400273

研究課題名(和文) 超弦理論とムーンシャイン現象

研究課題名(英文) string theory and moonshine phenomena

研究代表者

江口 徹 (EGUCHI, Tohru)

立教大学・理学部・特定課題研究員

研究者番号：20151970

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：我々はK3曲面上にコンパクト化された超弦理論に注目して、その楕円種数を超弦理論の指標関数を使って展開してみた。すると驚くことにその展開係数がマシュー群とよばれる離散群の次元と一致することに気がついた。これはモジュラーJ関数をテイラー展開するとその展開係数がモンスター群の表現の次元と一致するという有名なモンスタームーンシャインの現象を思い出させる。我々の発見した現象はマシュームーンシャインと呼ばれるようになり多くの研究者の関心を引くことになった。マシュームーンシャインはさまざまな類似のムーンシャイン現象をもち現在本研究で詳しい分析が行われている。

研究成果の概要(英文)：We were concerned with the superstring theory compactified on K3 surface and expanded its elliptic genus in terms of character formulas of string theory. We are surprised to find expansion coefficients agree with the representations of the Mathieu group. This situation is analogous with the case of monstrous moonshine where Fourier expansion coefficients of modular J function agreed with the dimensions of Monster group. Thus the new phenomenon we have discovered is now called Mathieu moonshine. Mathieu moonshine is at the corner of various branches of mathematics and is also intimately related to string theory. Mathieu moonshine contains a number of similar moonshine phenomena which are being under our extensive investigation.

研究分野：数理論理学

キーワード：string theory supersymmetry K3 surface moonshine phenomenon

1. 研究開始当初の背景

超弦理論は 10 次元の時空に存在する。我々の住んでいる時空は 4 次元なので、残りの 6 次元空間は目に見えないような小さなサイズの空間に丸まっているものと考えられる。超弦理論が素粒子の標準理論を再現するにはこの余分な空間が 4 次元空間と 2 次元の球面(あるいはトーラス)からできている場合がもっとも具合がよい。K3 曲面は自己双対曲率を持つ 4 次元で唯一の曲面で現代の複素幾何学において最も基本的な役割を演じている。K3 曲面上にコンパクト化された超弦理論はスーパーチャージを 4 つ持つ超共形場の理論である。

江口は 1990 年頃に K3 曲面上にコンパクト化された超弦理論に関して詳しい研究を行った。その結果、K3 の共形場理論でもっとも重要な性質は、BPS 表現と呼ばれるゼロエネルギー状態のみを含む表現が存在すること(負エネルギー状態は含まない)。また(厳密に)正エネルギー状態のみを含む非 BPS 表現と呼ばれる表現が存在することである。非 BPS 表現はシンギュラーベクトルを持たず、自由場の理論と同じ構造、同じ展開関数を持っている。

一方、BPS 表現の展開関数には分母に複雑な因子が現れる。このため BPS 表現のキャラクターは、通常の保形変換の変換性を持たず、保形性に関して一種のアノマリーを持つことになる。ゼロエネルギー状態は通常多様体のコホモロジーに対応するので BPS 表現に含まれるゼロエネルギー状態が K3 曲面のトポロジーを記述するものと考えられる。

したがって超対称性を持つ系は一般にアノマリーをもち、BPS 表現のキャラクターは標準的な保形性からずれた変換性をもつ。保形形式の理論ではこれらの崩れた変換性を持つ保形形式をモックテータ関数と呼ぶ。モッ

クテータ関数は前世紀初めにラマヌージャンによって調べられたが、一般の保形形式と同等に取り扱うべきかはっきりしないうちに彼が亡くなってしまった。最近モックテータが共形場のアノマリーと関係して深い研究が行われるようになった。

江口は 2011 年頃に K3 の楕円種数を超弦理論の種々の指標関数を使って展開してみた。すると驚くべきことにその展開係数がマッシュュー群 M24 とよばれる離散群の規約次元の和と一致することに気がついた。これはモジュラー J 関数をテイラー展開するとその展開係数がモンスター群の表現の次元と一致するという有名なモンストラス・ムーンシャインの現象(1978 年)を思いおこさせる。我々の発見した現象はマッシュュー・ムーンシャインと呼ばれるようになり多くの研究者の関心を引くことになった。マッシュュー・ムーンシャインは超弦理論、保形形式、有限離散群、複素幾何学などさまざまな数学や物理の接点にあり非常に興味深い。

2. 研究の目的

K3 の楕円種数の展開係数がマッシュュー群 M24 の規約表現の次元の和で表せることは 2011 年に Gannon によって厳密に数学的方法を用いて証明され、マッシュュー・ムーンシャインは数学的には正しいことはすでに証明されているとあってよい。しかしどうしてこういう不思議な現象が起きるのかその背景の理解の仕方まだ全くわかっていない。K3 の楕円種数の展開係数とマッシュュー群 M24 の間の不思議な現象に分かりやすい説明をつけることが本研究の最大の目的である。

マッシュュー群 M24 が 24 桁の 2 進数のエラー訂正コードとして有名なゴレーコードの自己対照群であることはよく知られている。このような特別な対称性が超弦理論に現れることは非常に不思議なことで何か深い意味

を暗示しているのではないかと思われる。マシユー・ムーンシャインで明らかにされたマシユー群 M_{24} と K_3 空間の関係を通して、超弦理論における隠れた対称性とその起源を探求する。

3. 研究の方法

ムーンシャイン現象の研究は各研究者が持つ独特の個性が影響を与える事も多く、世界各地の研究者がそれぞれの研究所の中心的研究者として研究会を組織した。研究者間で活発な議論を交わしそれが新しい発見に導いた。

4. 研究成果

マシユームーンシャインはさまざまな類似のムーンシャイン現象を持ち、特によく知られたものにウンブラル・ムーンシャインがある。ウンブラル・ムーンシャインはマシユー・ムーンシャインの K_3 曲面がコンパクトで、特異点を持たない場合、ウンブラルムーンシャインの K_3 曲面は特異性を持つ非コンパクトな多様体になると考えられている。(強い) $N=4$ のスーパーシンメトリーを持つ弦理論を考えると磁気と電気の双対性で互いに入れ替わることが知られている。

ウンブラルムーンシャインとニーマイヤー格子 (2次元の自己双対の格子)の間にはまた不思議な関係が知られている。ニーマイヤー格子は $A-D-E$ 型のルート格子に適当なウェイト格子を加えて自己同型にしたものであるが、その部分群を調べると $G_1 = M_{24}$ 、 $G_2 = M_{12}$ 、 $G_3 = L_3(2)$ 、...、となりウンブラルムーンシャインの対称群 (G_1, G_2, G_3, \dots) が得られる。

最近我々は (強い) $N=4$ のスーパーシンメトリーをもつ共形場の理論を考えると、セクター $C=6k$ のウンブラルシリーズを $C=6$

のマシユー理論に埋め込みすることができる事に気がついた。ウンブラル・ムーンシャインとマシユームーンシャインは見かけだけ違う理論であるようにみえる。

テータ関数をモックテータ関数に置き換えるのは物理でもちいる一種の正則化法と考えることができる。保形性に関するアノマリーの分析を的確に応用する事ができるようになれば、連続スペクトラムと離散スペクトルが重なり合うようなデリケートな問題も的確に取り扱う事ができる可能性が出てくるものと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6件)

① Tohru Eguchi String theory and moonshine phenomenon, The Universe, 5, 査読無、2017、16-22

② Tohru Eguchi, Professor Nambu, string theory and the moonshine phenomenon, PTEP, 2016 no. 12, 査読有、2016 10. 1093./ptep/ptw132

③ Tohru Eguchi, Duality in $N=4$ Liouville Theory and Moonshine Phenomena, 2016 no. 6, 査読有、2016 10. 1093./ptep/ptw078

④ Tohru Eguchi and Yuji Sugawara, Compact Formulas for the Completed Mock Modular Forms, JHEP, 1411, 査読有、2014、pp. 156 10. 1007/JHEP11(2014)156

⑤ Tohru Eguchi, Lattice gauge theory and the large N reduction, Int. J. Mod. Phys. A, 29, 査読無、2014、pp. 1430036 10. 1142/S021775X14300361

⑥ Tohru Eguchi and Kazuhiro Hikami, Enriques moonshine, Journal of Physics A, 46, 査読有、2013、pp. 312001 10. 1088/1751-8113/46/31/312001

[学会発表] (計 15件)

① 江口 徹、 K_3 surface and Moonshine Phenomenon、日本数学会 70 周年記念、2016

② 江口徹、string theory and moonshine phenomena、NCTS、2016

③ T.Eguchi、Moonshine Phenomena in String Theory、Nambu Memorial Symposium、2016

④ T.Eguchi、Quotient Singularity and Gauge Symmetry、60 year anniversary of Yang-Mills Gauge Theory、2015

⑤ T.Eguchi、K3 Surface and Mathieu Moonshine、New Moonshine、Mock modular Form and String Theory、2015

⑥ T.Eguchi、Moonshine Phenomena in String Theory、Yoichiro Nambu's Physics、2015

⑦ T.Eguchi、K3 Surface and Mathieu Moonshine、Moduli space, conformal field theory and matrix model、2015

⑧ 江口徹、K3 surface and Mathieu moonshine、岡潔シンポジウム、2014

⑨ Tohru Eguchi、Mathieu moonshine and superconformal algebra、Symposium on string theory、2014

⑩ Tohru Eguchi、Puzzles and Challenges of String Theory、Colloquim of Physics Department、2014

⑪ Tohru eguchi、Mathieu moonshine and superconformal algebra、Peter Goddard symposium、2014

⑫ 江口徹、マッシュームーンシャインと超共形代数、Superstrings theory and VOA、2014

⑬ Tohru Eguchi、Mathieu moonshine and superconformal algebra、Arithmetic and Algebraic Geometry 2014、2014

⑭ 江口徹、超弦理論のゆくえ、基礎物理学研究所創立 60 周年記念シンポジウム、2013

⑮ Tohru Eguchi、Mathieu moonshine and K3 surface、Mock modular forms, moonshine, and String theory、2013

〔図書〕(計 1 件)

① 江口徹、菅原祐二 共形場理論、岩波書店、320(1-160)、2015

6. 研究組織

(1) 研究代表者

江口 徹 (EGUCHI, Tohru)

立教大学・理学部・特定課題研究員

研究者番号：20151970