

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：10102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610001

研究課題名(和文)反シンプレクティック正則対合を持つ実K3曲面とその退化

研究課題名(英文)Real K3 surfaces with non-symplectic holomorphic involutions and their degenerations

研究代表者

齋藤 幸子(Saito, Sachiko)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：40260400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：S= $U+(-2)$ 型の場合に、実Hirzebruch曲面  $RF_4$  上の1つ2重点を持つanti-bicanonical曲線のisotopy型分類について、得られた結果を論文にまとめ、J.of Singularitiesに投稿し、査読者から1つのタイプのdegenerationの考察が不要なこと、直交分解 $U+(-2)$ の情報をmarkingの条件に加えるべきことを指摘され、2014年に論文を再投稿、5月にJ.of Singularitiesに受理された。2013～2015年の毎夏に「K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ」を北海道で開催し、K3曲面の若手研究者と有意義な情報交換・討論を行った。

研究成果の概要(英文)：I submitted my paper: "On real anti-bicanonical curves with one double point on the 4-th real Hirzebruch surface" to Journal of Singularities in 2013. The referee gave me valuable comments and important indications, that is, needlessness of one degeneration which I introduced, and requirements for the marking adapted to the orthogonal decomposition  $U+(-2)$ . I revised the paper and submitted it again. It was accepted in May 2014 and published in January 2015. I held Workshops on K3 surfaces and Enriques surfaces every summer during 2013--2015. Participants, including young talented mathematicians working for K3 surfaces and Enriques surfaces, discussed each other.

研究分野：幾何学

キーワード：K3曲面 エンリケス曲面 反シンプレクティック正則対合 格子 周期領域 モジュライ (-2)ベクトル 退化

### 1. 研究開始当初の背景

反シンプレクティック正則対合を持つ K3 曲面は, V.Nikulin, I.Dolgachev らによって研究が始められ, 反シンプレクティック正則対合を持つ K3 曲面  $X$  に対し, その 2 次元ホモロジー群  $H_2(X; \mathbb{Z})$  への  $*$  作用の固定部分の同型類  $S$  は 75 通りあり, 特に,  $S=U(2)+E8(2)$  のとき, 商空間  $X/\tau$  は Enriques 曲面である.  $(X, \tau)$  がさらに  $\tau$  と可換な反正則対合 (= 実構造) を持つとき, 反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面と呼ばれる.  $S$  型の反シンプレクティック正則対合を持つ K3 曲面の粗モジュライ空間は連結であるが, 実構造を持つ場合, すなわち,  $(S, \tau)$  型の反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面のモジュライ空間は一般には非連結で, その連結成分を書き下すことや, 各連結成分と  $(S, \tau)$  型の対合付き K3 格子の同型類の対応, 連結成分の隣接関係に関心が移る. 研究代表者 (齋藤幸子) と V.Nikulin (Liverpool 大学) は,  $(S, \tau)$  型の DR-非退化な反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面の周期領域の連結成分が,  $(S, \theta)$  型の対合付き K3 格子の同型類と 1 対 1 に対応するという定理を得,  $\text{rank } S \leq 2$  の各々の  $(S, \theta)$  に対し,  $(S, \theta)$  型の対合付き K3 格子の同型類を全て書き下し,  $X/\tau$  の不動点曲線  $A$  の実部  $RA$  の実曲面  $R(X/\tau)$  におけるモジュライ分類を完成し (2005 年), さらに,  $\text{rank } S=3$  の場合の研究も開始した (2007 年). 一方, I.Itenberg 氏 (Jussieu 数学研究所) は, 1 つ非退化 2 重点 (node または isolated point) を持つ実 6 次曲線の rigid isotopy 分類 (これは  $S=\langle 2 \rangle + \langle -2 \rangle$  の場合に対応) を 1992 年頃完成し, この研究手法は現在未解決である  $\text{rank } S=3$  の場合, 特に, 「 $S=(3,1,1)=U+\langle -2 \rangle$  型の反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面のモジュライ空間の研究」から「実 Hirzebruch 曲面  $RF_4$  上の 1 つ 2 重点を持つ anti-bicanonical 曲線の rigid isotopy 型分類」への精密化の研究に重要な指針を与える.

### 2. 研究の目的

本研究課題は, 反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面のモジュライ空間 (周期領域) の連結成分, それらの隣接関係, 連結成分と対合付き K3 格子 ( $H_2(X; \mathbb{Z}), \tau^*, \varphi^*$ ) の同型類の関係, 商複素曲面  $X/\tau$  をブローダウンした際に  $X/\tau$  の不動点曲線に生じる特異点の実部の特異性および非特異曲線からの退化について調べることを目的とする. これは, Hilbert 第 16 問題と同様の問題提起である.  $S=\langle 2 \rangle + \langle -2 \rangle$  の場合は, 実射影平面  $RP^2$  上の 2 重点を 1 つ持つ実 6 次曲線の rigid isotopy 分類と対応するが, 非退化 2 重点を 1 つ持つ実 6 次曲線の rigid isotopy 型の全体は,  $\langle 2 \rangle + \langle -2 \rangle$  型の反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面の周期領域から退化 2 重点を持つ曲線からなる超平面

(walls) を取り除いて得られる多角形 (chambers) に対応する. rigid isotopy 類を頂点 (vertex) とし, 変形 「node - cusp - isolated point」に対応する 2 頂点を simple edge で結んで得られるグラフが, 対合付き K3 格子 ( $H_2(X; \mathbb{Z}), \varphi^*$ ) の同型類から代数的に得られる Coxeter グラフと関係することも見出されている. この一連のアプローチは, A.Degtyarev, I.Itenberg, V.Kharlamov により, 実 Enriques 曲面の分類にも応用された (2000). 本研究課題では, まず, 同様のアプローチを,  $S=(3,1,1)=U+\langle -2 \rangle$  の場合に対して実行し, 実 Hirzebruch 曲面  $RF_4$  上の 2 重点を 1 つ持つ実 anti-bicanonical 曲線の isotopy 分類を完成し, さらに, 別の型  $S$  についても, 反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面のモジュライ空間の構造, 実 K3 曲面の退化の解明を進めたい.

### 3. 研究の方法

$(S, \tau)$  型の反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面  $(X, \tau)$  のモジュライ空間 (周期領域) の分析を, 各  $(S, \tau)$  ごとに進める. そのため, A.Degtyarev, V.Kharlamov, I.Itenberg による実 Enriques 曲面のモジュライ空間の研究方法を見直し, 同時に, Coxeter グラフ, 鏡映群作用, 代数多様体の変形・退化, 消滅サイクル, Picard-Lefschetz 型公式に関する知識を補充する. また, 反シンプレクティック正則対合を持つ K3 曲面に関わる幾何的性質 (楕円 K3 曲面, del Pezzo 曲面) の理解にも努める. そのため, K3 曲面の研究者の所属する研究機関でのセミナーおよび研究集会に参加する. また, K3 曲面やカラビ・ヤウ多様体に関する国際的ワークショップにも参加し, V.Nikulin 氏, I.Itenberg 氏らの協力を受ける.

### 4. 研究成果

反シンプレクティック正則対合を持つ実 K3 曲面のモジュライ空間の研究における重要な例として,  $S=(3,1,1)=U+\langle -2 \rangle$  の場合について, 実 Hirzebruch 曲面  $RF_4$  上の 1 つ 2 重点を持つ anti-bicanonical 曲線の isotopy 型分類に応用する研究を継続した. isotopy 型分類の最終的完成には至らなかったが, 2013 年 8 月に, それまでに得られた結果を論文 "On real anti-bicanonical curves with one double point on the 4-th real Hirzebruch surface" にまとめ, Journal of Singularities に投稿した. この論文における主な成果は, まず,  $((3,1,1), -id)$  型の対合付き K3 格子の同型類全体 (2007 年に Nikulin との共同研究により得たもの) の各々の同型類に対して, それを実現するような  $RF_4$  上の 1 つ非退化 2 重点を持つ anti-bicanonical 曲線の isotopy 型の候補を絞ったことである. 続いて,  $RF_4$  上の非特異 anti-bicanonical 曲線のすべての

「non-increasing simplest degenerations」をリストアップした。そして、実 Hirzebruch 曲面  $RF_4$  上の 1 つ非退化 2 重点を持つ anti-bicanonical 曲線の isotopy 型と  $RF_4$  上の非特異な anti-bicanonical 曲線のすべての non-increasing simplest degenerations の間の明らかな興味深い対応を見出した。ところが、査読者の指摘により、私が導入した non-increasing simplest degenerations のうちの 1 つが不要なことが判明し、とても有益であった。また、この論文では、 $RF_4$  上の 1 つの 2 重点が非退化 (non-degenerate) であるための (K3 曲面の) 周期に関する必要十分条件を得ることも目指していたが、十分条件しか得られなかった。これについて引き続き研究を進めるため、査読者から、直交分解  $(3, 1, 1) = U + \langle -2 \rangle$  の情報を marking の条件に加えるべきことを助言された。それに基づき、marking と周期領域の定式化の見直しを行った。これも非常に有益な助言で、この方針に基づいて考え直すことにより、必要十分条件が得られると思われる。この論文は、2014 年 4 月に論文を再投稿し、5 月に Journal of Singularities に掲載許可され、2015 年 1 月に公表された。現在は、その「必要十分条件」に関する論文の執筆を進めている。

研究期間 (2013~2015 年度) の毎夏、「K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ」を開催し、K3 曲面の若手研究者達と有意義な研究発表・情報交換・討論を行った。ワークショップの内容は以下のとおりである。

2013 年 8 月は、「第 1 回ワークショップ」を札幌で開催し、連携研究者の大橋氏 (東京理科大) に、K3 曲面の non-Hausdorff な変形族の例についての講義 (参考文献は、Daniel Huybrechts 著「Lectures on K3 surfaces」)、瀧氏 (東海大学) に、K3 曲面への自己同型の作用に関する Smith 完全系列に関する講義、伊藤裕貴氏 (名古屋大学) に、 $(S, \quad)$  型の対合付き格子の分類に関する Nikulin の理論の (一部) 解説を含む研究発表をしていただいた。Smith 完全系列は、トポロジーにおける変換群論からの道具である。K3 曲面の非ハウスドルフな変形族の例は、K3 曲面の fine moduli の構造を知る上で本質的な特徴を与えている。研究代表者 (齋藤幸子) は、「実エンリケス曲面のモジュライの連結成分と対合付き格子の同型類の対応 (Degtyarev, Itenberg, Kharlamov の結果)」と、「Nikulin, "Involutions of integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry", Math. USSR Izv. 22 (1984) の主結果」について、紹介した。

2014 年 8 月は、「第 2 回ワークショップ」を旭川市国際会議場で開催した。松下大介氏 (北海道大学) の尽力により、多彩な研究者が集合した。講演者は、伊藤裕貴氏 (名古屋大学)、瀧真語氏 (東海大学)、大橋久範氏 (東京理科大学)、Malte Wandel 氏 (京都大学数

理解析研究所)、金銅誠之氏 (名古屋大学)、後藤泰宏氏 (北海道教育大学函館校)、真瀬真樹子氏 (首都大学東京)、松本雄也氏 (東京大学)、渡邊健太氏 (大阪大学)、植田一石氏 (大阪大学 (当時)) であった。金銅誠之氏には、Igusa quartic and Borcherds products に関する最新結果の発表と、A certain duality of Neron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces に関する講義をしていただいた。また、植田一石氏は、Mirror symmetry and K3 surfaces に関するとても興味深い最新結果の発表を行った。

2015 年 8 月は、「第 3 回ワークショップ」を北海道教育大学札幌駅前サテライトで開催した。講演者は、内海和樹氏 (立命館大学)、那須弘和氏 (東海大学)、渡辺究氏 (埼玉大学)、山本彦彦氏 (京都大学)、真瀬真樹子氏 (首都大学東京)、伊藤裕貴氏 (名古屋大学)、池田京司氏 (東京電機大学)、月岡透氏 (東海大学)、渡邊健太氏 (大阪大学)、鎌田政人氏 (中央大学) であった。ワークショップに続く勉強会で、大橋久範氏 (東京理科大学) が K3 曲面の基本事項に関する講義を行った。また、研究代表者 (齋藤幸子) は、実 K3 曲面の分類に関する諸問題について解説し、研究の進捗状況について解説した。大橋氏からは、例外因子に関する有益な助言を得、2014 年度にやり残した「 $RF_4$  上の 1 つの 2 重点が非退化 (non-degenerate) であるための (K3 曲面の) 周期に関する必要十分条件」を得る課題の研究を大きく進めることができた。

研究集会やセミナーの出席および聴講は以下のとおりである。

2013 年 6 月に、京都大学数理解析研究所で「モジュライ理論の発展」国際研究集会 (向井茂教授還暦記念) が行われた。これに参加して、K3 曲面に関連する最新の結果を聴講した。

2014 年 11 月 京都国際会館で行われた、第 30 回京都賞記念ワークショップ基礎科学部門「超弦理論の拓く 21 世紀の数理学」に出席し、Edward Witten 氏 (プリンストン高等研究所)、中島啓氏 (京都大学)、立川裕二氏 (東京大学) による数理論理についての講演を聴講した。K3 曲面は、数理論理にも現れる。このワークショップでは、数学的手法で研究されている最新の物理の研究に関する知識を得た。

名古屋大学多元数理科学研究科で行われた「K3, Enriques Surfaces and Related Topics」で、V. Gritsenko 氏、馬昭平氏、V. Alexeev 氏らの講演を聴講した。

2015 年 11 月、名古屋大学滞在中の V. Nikulin 氏 (Liverpool 大学) の最新結果に関する講演を聴講した。

なお、2013 年 4 月から 6 月まで、北海道大学で松下大介氏 (北海道大学) による「twisted K3 surfaces」に関する講義を受け、K3 曲面に関する圏論的アプローチや「向井格子」に興味深い知識を得たが、本

研究に活用するには至らなかった。将来，関連が見つければ，有益であろう。

前に述べた「RF\_4 上の 1 つの 2 重点が非退化(non-degenerate)であるための(K3 曲面の)周期に関する必要十分条件」を得る研究においては，K3 曲面の 2 次元ホモロジー格子における(-2)ベクトルに関する考察が非常に重要であった。このことは，この研究の挑戦的萌芽研究としての申請の段階でも予想していたが，研究課題遂行中に益々重要性を強く認識した。特に，2015 年 8 月に開催した「第 3 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ」において，大橋久範氏(東京理科大学)との討論の中で知識を得たり，再確認したことが多く，これは本研究課題の研究成果をまとめる上でも，今後の研究の方向の定める上でも，非常に重要な情報となった。K3 曲面の 2 次元ホモロジー格子において，負の自己交点数を持つベクトルが既約因子で代表されるか，effective 因子で代表されるかという問題は，熟練した研究者でも混乱することが多く，厳密で慎重な研究を進めて，確かな結果を集約することは，K3 曲面やエンリケス曲面の研究界にとって有益な事である。今後もこの研究を進めて行きたい。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

瀧真語，馬昭平，大橋久範，Rationality of the moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有，367, 2015, no. 12, 8643--8679.

齋藤幸子，On real anti-bicanonical curves with one double point on the 4-th real Hirzebruch surface, Journal of Singularities, 査読有，11, 2015, 1--32.

伊藤裕貴，大橋久範，Classification of involutions on Enriques surfaces, Michigan Math. J., 査読有，63, 2014, 159--188.

向井茂，大橋久範，Enriques surfaces of Hutchinson-Goeppel type and Mathieu automorphisms, Fields Institute Communications 67, Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau Threefolds., 査読有，2013, 429—454.

〔学会発表〕(計 3 件)

齋藤幸子，実 K3 曲面の分類に関する諸問題(1)(2)，第 3 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ，2015 年 8 月 20, 21 日，「北海道教育大学札幌駅前サテライト(北海道・札幌市)」。

齋藤幸子，Nikulin, "Involutions of

integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry", Math.USSR Izv. 22 (1984) の主結果について，第 1 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ，2013 年 8 月 25 日，「北海道教育大学札幌駅前サテライト(北海道・札幌市)」。

齋藤幸子，実エンリケス曲面のモジュライの連結成分と対合付き格子の同型類の対応(Degtyarev, Itenberg, Kharlamov の結果)，第 1 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ，2013 年 8 月 25 日，「北海道教育大学札幌駅前サテライト(北海道・札幌市)」。

〔その他〕

ホームページ等

齋藤幸子(北海道教育大学研究者総覧)

<http://kensoran.hokkyodai.ac.jp/huehp/KgApp?kyoinId=yomisgggggb&keyword=>

K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ  
第 1 回 (平成 25 年度)

<http://sm.u-tokai.ac.jp/~taki/2013hokkaido.html>

第 2 回 (平成 26 年度)

<http://sm.u-tokai.ac.jp/~taki/2014hokkaido.html>

第 3 回 (平成 27 年度)

<http://sm.u-tokai.ac.jp/~taki/2015hokkaido.html>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤幸子 (Saito, Sachiko)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：40260400

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

瀧真語 (Taki, Shingo)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：30609714

大橋久範 (Ohashi, Hisanori)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：40547006

馬昭平 (Ma, Shohei)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：80633255