

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：32601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610008

研究課題名(和文)トロピカル多様体と等質空間の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of tropical variety and homogeneous spaces

研究代表者

西山 享(Nishiyama, Kyo)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：70183085

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：戸田格子の解の超離散化に必要な、解の表示の正值性について集中的に研究を行った。Lax表示された戸田格子の方程式と解の離散化について、基礎的な理論に対する理解を深めるとともに、その結果を「特異曲線を用いた有限戸田格子の正值性の代数幾何学的特徴付けについて」として、現在論文にまとめている。一方、戸田格子のLax表示と旗多様体の量子コホモロジー環およびそのK理論への一般化、とくにPeterson同型に関する研究を継続中である。シューベルト多項式、グロタンディック多項式などの計算・その行列式表示に関しても多くの部分的結果を得ているので、まとめて、何らかの形で成果として発表したい。

研究成果の概要(英文)：We studies the methods of (ultra-)discretization of Toda lattice through the Lax formalism. There are so many researches in this field, but our emphasis is on the totally nonnegative matrices and algebro-geometric tools, such as singular (nodal) rational curves and Jacobian varieties. Thus our main result is proving the Lax matrices of Toda lattice which is totally nonnegative give the totally positive part of the Jacobian variety, which is summarized into the paper: Geometric interpretation of the totally nonnegative part of the finite Toda lattice via a singular rational curve. The paper is now being prepared. We also studied on the quantum cohomology on the flag varieties and Peterson isomorphism. In this direction, we obtained various explicit formulas of Schubert polynomials and/or Grothendieck polynomials, especially their determinantal expressions. However, the results are somewhat rambling and it seems it will take some more time to organize them in a nice way.

研究分野：表現論

キーワード：戸田格子 Lax行列 totally positive matrix ヤコビ多様体 超離散化 トロピカル幾何 量子コホモロジー シューベルト多項式

様式 C-19、F-19、Z-19(共通)

1. 研究開始当初の背景

超離散可積分系とは、戸田方程式、KP方程式などの古典可積分系の超離散極限を取り出し、もとの系の『骨格』を抜き出したものであり、多くの研究の蓄積がある。

古典可積分系の初期値問題が代数曲線を用いた逆散乱解法で解かれる、という事実はよく知られていたが、上記の研究は、その類似が超離散可積分系とトロピカル曲線の間でも成り立つことを主張している。

しかし、超離散化のために必要な可積分系の解の表示の正值性や、あるいはその幾何学的な意味づけはまだ緒に就いたばかりであった。

さらに、戸田格子の解法に現れるスペクトル曲線は超離散化によってリーマン面に対応するトロピカル曲線になるはずであり、そのモノドロミー理論なども整備の途上であった。

一方で、旗多様体上の量子コホモロジー環の関係式が戸田方程式のLax表示を用いて書き下されることは古くから知られていたが、それをPeterson同型を通じて量子コホモロジー環のK理論版の関係式へと一般化する取り組みも盛んに行われるようになっていた。この関係式は正值性と深くつながっており、さらにシューベルト多項式やその一般化であるグロタンディック多項式の行列表示も盛んに研究が行われている状況であった。

2. 研究の目的

我々の狙いは、戸田方程式の逆散乱法による解法のトロピカル版を、超離散パンルヴェ方程式などの新しい差分方程式系や、ヒッチン系などの幾何学的セッティングに拡張することで、古典可積分系の持つ豊富な知識をトロピカル幾何学に導入することであった。

そのために、戸田方程式のLax表示から出発し、特異積分曲線の理論を介してリーマン面のトロピカル化(トロピカル代数曲線)の理論を研究し、そのモノドロミーやディバイザー、そしてヤコビ多様体の研究へとトロピカル幾何学を導くことを計画していた。この際、リーマン面の退化の理論とアマーバの関係、そして退化を利用したモノドロミーの計算なども視野に入れている。

さらに、超離散化を行うために戸田方程式の解の正值行列式による表示、ひいては、Lax表示から得られる量子コホモロジー環の係数の正值性などを研究することも目標の一つであった。

3. 研究の方法

研究の方法として、まず、Kostant による戸田方程式のLax表示を用いた解法を復習し、逆散乱法を用いて、解曲線のグラスマン多様体上における線型化について深く考察した。この段階では、少人数のセミナーで互いに講義録をまとめながら、基地の知識を整理することに重点を置いた。

セミナーと並行して、トロピカル幾何学や、クラスター代数とパンルヴェ方程式の関係、正值行列式の理論、KP階層の超離散化とその解法、量子コホモロジーとPeterson同型・量子コホモロジーのK理論版とグロタンディック他公式、マトロイドの理論、トーリック多様体の退化等々、関連分野の専門家を招聘して、専門的な知識を供与していただくと同時に、さまざまな分野との交流を深めることに心を砕いた。

実際の研究においては、具体的な解と行列表示を求めめるため、計算機による具体的な計算も多用した。これは研究の方向を定めるよい指針となった。

研究の後半では、世界的な専門家を多数招聘した国際研究集会を企画し、この集会の開催によって、さまざまな専門分野の知識を吸収し、研究をまとめ上げることを考えた。

正值行列式の理論ではPinkusによる専門書、また特異曲線上のヤコビ多様体に関してはMumfordのTata講義ノートが本質的である。これらの知識を吸収するために個人的な、小規模のセミナーを数多く開き、共同研究者の間で知識を共有した。

研究の最後の期間はほぼ毎日のように行われるワーキング・セミナー(互いに計算を披露しながら、方向を見定める)が主な原動力となり、この場で主要な結果を得ることができた。

4. 研究成果

戸田格子の解の超離散化に必要な、解の表示の正值性についての結果を得たのが主結果である。

Lax表示された戸田格子の方程式から出発し、その時間不変量であるスペクトルに注目する。このスペクトルを用いて特異代数曲線(スペクトル曲線)が定義できるが、この曲線上のヤコビ多様体とヤコビ写像によって、戸田方程式の解が線型化される。

解の離散化に本質的であるのは、この線型化に際して現れるタウ行列やテータ関数の行列式表示の正值性であるが、その中でも

一番基本的な，Lax行列が三重対角行列であるときに正值性を証明することに成功した。

証明の手法は，まず，特異曲線のノード（特異点）における，解ベクトルが定める直線束の「差」を用いて，解ベクトル自身を行列表示する．この行列表示の形から，もとの三重対角のLax行列が正值行列であることと解ベクトルの成分が正值であることを示し，最終的にそれがヤコビ写像による像になっていることを示すのである．

その結果は「特異曲線を用いた有限戸田格子の正值性の代数幾何学的特徴付けについて」と題して，現在，論文の形にまとめつつある．英文のタイトルは

Geometric interpretation of the totally nonnegative part of the finite Toda lattice via a singular rational curve.

である．まだ草稿の段階であるが，早期に完成して，論文として発表する予定である．

すでに解説したように，この論文における主定理は，戸田方程式の解空間における正值行列の部分，逆散乱法で現れる特異曲線のヤコビ多様体上のやはり正值部分に，ヤコビ写像で同型に写されるというものである．代数群や，代数幾何学的な意味づけも可能で，興味深い．

一方，戸田格子のLax表示と旗多様体の量子コホモロジー環およびそのK理論への一般化，とくにPeterson同型に関する研究はまだ継続中である．

シューベルト多項式，グロータンディク多項式などの具体的な計算を行い，行列式表示に関しても多くの部分的結果を得ている．例えば，シャッフル置換に対応するシューベルト多項式はシューア関数による行列式表示を持つことが証明できる．しかし，これらの結果は全体として，まだ散漫なものに終わっている．

研究を継続して，これらを意味ある形にまとめて発表することを考えている．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 4 件)

(1)

発表者名 Shinsuke Iwao

表題 Totally non-negativity, singular curves and Kostant-Toda hierarchy
学会名等 Workshop "Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity"

発表年月日 2015年12月22日

発表場所 青山学院大学

(2)

発表者名 岩尾慎介、西山享、小川竜

表題 Kostant-Toda階層, Totally non-negative matrix と特異曲線

学会名: 日本数学会2015年度秋季総合分科会

発表年月日 2015年9月13日

発表場所 京都産業大学

(3)

発表者名 Shinsuke Iwao

表題 Tropical singular curves and Classical integrable systems

学会名等 Students' Workshop on Tropical and Non-Archimedean Geometry

Universität Regensburg 2015

発表年月日: 2015年8月5日

発表場所: レーゲンスブルグ大学 (ドイツ)

(4)

発表者名 Shinsuke Iwao

発表標題 Tropical geometry and discrete integrable systems

学会等名 JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013, Discrete Mathematics & its Applications (招待講演)

発表年月日 8 Nov. 2013

発表場所 Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

[図書] (計 2 件)

西山享著「射影幾何学の考え方」数学のかんどころ19, 共立出版, 2013年(240頁)

太田琢也・西山享著「代数群と軌道」数学の杜 3, 数学書房, 2015年(448頁)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

集会ホームページ
Workshop: Topics on tropical geometry,
integrable systems and positivity

<https://sites.google.com/site/tropintpos/home>

トロピカル・セミナーホームページ

http://www.gem.aoyama.ac.jp/~kyo/tropical_seminar.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西山 享 青山学院大学・理工学部・教授
(Kyo Nishiyama)

研究者番号：70183085

(2) 研究分担者

岩尾 慎介 青山学院大学・理工学部・助教
(Shinsuke Iwao)

研究者番号：70634989

(3) 連携研究者

()

研究者番号：