

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2016

課題番号：25610012

研究課題名(和文) テスト配位列の仮想極限点の研究

研究課題名(英文) The study of ideal limits of sequences of test configurations

研究代表者

満洲 俊樹 (MABUCHI, TOSHIKI)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：80116102

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：テスト配位のモジュライ空間の自然なコンパクト化を構成するため、そのモジュライ空間の完備化を系統的に研究した。その著しい成果として、個々のテスト配位に対して定義される Donaldson-二木不変量が、指数が無限大に発散するようなテスト配位列に対する不変量として自然に拡張されることが分かった。さらに一般の偏極代数多様体において強K-安定性という概念を導入した。この新しく導入された強K-安定性から漸近Chow安定性が示されることにより、この新しい見方が特殊計量の存在等にさらに色々な応用を生むことも分かってきた。

研究成果の概要(英文)：We made a systematic study of the completion of the moduli space of test configurations for a polarized algebraic manifold. As a typical example of our study, we obtain the Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations on a polarized algebraic manifold. This then allows us to introduce the concept of strong K-stability. Moreover, by a joint work with Nitta, we showed that strong K-stability implies asymptotic Chow stability. These results in particular give us various applications in the existence problem of extremal Kähler metrics.

研究分野：複素微分幾何学

キーワード：テスト配位列 K-安定性 Donaldson-二木不変量 polybalanced計量 相対安定性

1. 研究開始当初の背景

1980年代に確立した小林-Hitchin 対応においては、コンパクト連結ケーラー多様体上の正則ベクトル束の安定性が根本概念であり、これは各接続部分層の slope がもとのベクトル束の slope より小さくなることで特徴付けられる。さらに閉リーマン面上では接続部分層のかわりに subbundle を考えれば十分ということも知られている。一方、小林-ヒッチン対応の多様体版においては、2000年前後に Tian や Donaldson によって導入された K-安定性が(何らかの微調整が必要かも知れないが)求めるべき基本概念であろうと予想されていた。ここで偏極代数多様体が K-安定であるとは、各テスト配位の Donaldson-Futaki 不変量が負となることで定義される。ただしテスト配位の概念は、まだベクトル束の場合の subbundle の概念の段階にとどまっていて、接続部分層の段階にまで一般化させる必要があるとも考えられる。反標準偏極や標準偏極の場合は、Einstein 計量の存在のためには K-安定性でも十分であることが最近 Tian や Donaldson によって示されたが、一般の偏極の場合は K-安定性をもっと強めた概念が必要であろうと予想される。そこで我々はベクトル束の場合の接続部分層にあたるものとして、テスト配位列の仮想極限点というものを考察するに至った。

2. 研究の目的

偏極代数多様体上のテスト配位に対しては、Donaldson-二木不変量 F_1 が定義され、この量が Donaldson-Tian-Yau 予想において重要な役割を果たしていることが広く知られている。こういった事実をふまえ小林-Hitchin 対応の多様体版をより精密に考察するため、テスト配位の概念を拡張する。そこで偏極代数多様体上で、テスト配位の列 $\{\mu_n\}$ に対して、必要ならば適当な部分列をとり、仮想極限点 μ_∞ というものを考える。そして以下の課題を解決することを目指した。

- (a) μ_∞ に対応する幾何的対象を決定し、その Donaldson-Futaki 不変量 $F_1(\mu_\infty)$ を定義する。
- (b) テスト配位全体の空間 M が precompact になるよう、 M に自然な位相を定める。

この発展形として、偏極代数多様体上で必ずしも指数が一定とは限らないテスト配位全体のなすモジュライ空間の適当なコンパクト化に、上記不変量が自然に拡張され、しかも polybalanced 計量の発散列に付随して定義されるテスト配位列の極限では Donaldson-二木不変量が必ず消えるように理論の枠組みを作ることが目的である。

もしこの枠組みが出来上がれば、小野-佐野-四ツ谷の提起した「K-安定性の条件が漸近

Chow 安定性に比べて弱すぎる」という問題が解決する一方、Donaldson-Tian-Yau 予想や、その extremal Kaehler 版の解決のための重要なステップも得られたことになる。

3. 研究の方法

研究代表者は研究分担者や連携研究者と協力して、テスト配位、K-安定性、Chow 漸近安定性、Chow norm、定スカラー曲率 Kaehler 計量、相対性、特異性除去可能定理、Donaldson-Futaki 不変量等に関する勉強会を繰り返し開き、知見を深めるとともに、我々の研究プログラム

- (a) 不変量 F_1 の定義域を M からその完備化へ拡張する；
- (b) M の何らかの有界性を示す；

の各未解決部分の詳細を詰めることにより、研究目的達成への道筋を確立した。一方で、菅平や金沢での国際複素幾何シンポジウムや PRCGC(環太平洋複素幾何コンファレンス)を毎年開催することにより、国際的な発表や情報交換の場を設けるとともに、国際的なレビューをも受けた。

また研究課題に関連する書物や雑誌を、我々の研究を基礎から支える備品として購入した一方、理論の予測やチェックを行うための数値実験用計算機ソフトも研究に不可欠な消耗品として購入し活用した。

4. 研究成果

テスト配位のモジュライ空間の自然なコンパクト化を構成するため、そのモジュライ空間の完備化を考察した。そして各テスト配位に対して定義される Donaldson-二木不変量を、テスト配位列全体の成すモジュライ空間上で定義された不変量に拡張することに取り組み次の結果を得た。

- (1) 論文「The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, Progress in Math.第308巻」において、このような拡張が可能であることを示し、さらに一般の偏極代数多様体において強K-安定性という概念を導入した。特に正則自己同型群が離散的なら定スカラー曲率ケーラー計量をもつような偏極代数多様体は強K-半安定である。これらの結果は Birkhäuser 社の小林記念論文集に掲載された。この新しく導入された強K-安定性の概念が、以下のように漸近Chow 安定性と深い関係があることが分かった。

- (2) 新田泰文氏(東工大)との共著「Strong K-stability and asymptotic Chow stability, Progress in Math.第308巻」で、一般の偏極代数多様体に対して、強K-安定性から漸近Chow 安定性が従うことを示した。この結果を

用いると強K-安定性の仮定の下に, balanced 計量の列が得られるので, これは定スカラー曲率ケーラー計量の存在問題において将来的にも非常に重要な役割を果たすと思われる.

上の (1) と (2) をさらに発展させた論文 (3) 「The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I」を Springer Proc. Math. Stat. の第154巻に発表した. この論文は強 K-安定性から定スカラー曲率 Kaehler 計量の存在を導く具体的なプランを提示した.

さらに, 我々の研究課題の一環として, (4) 論文「An l -th root of a test configuration of exponent l 」も雑誌 Complex Manifolds の第3巻に掲載され, テスト配位のリコンパクト性のある種の有界性 (プレコンパクト性) を示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6 件)

[1] T.Mabuchi: The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I, 査読有, Springer Proc. Math. Stat., vol.154, 2016, 235-245

[2] T. Mabuchi: An l -th root of a test configuration of exponent l , 査読有, Complex Manifolds, vol.3, 2016, 169-185
DOI: 10.1515/coma-2016-0005

[3] T.Mabuchi: The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, 査読有, Progress in Math., Birkhuser, vol.308, 2015, 395-403

[4] T.Mabuchi and Y. Nitta: Strong K-stability and asymptotic Chow-stability, 査読有, Progress in Math., Birkhuser, vol.308, 2015, 405-411

[5] T.Mabuchi: Relative stability and extremal metrics, 査読有, J. math. Soc. Japan, vol.66, 2014, 535-563
DOI: 10.2969/jmsj/06620535

[6] T.Mabuchi and Y. Nakagawa: New examples of Sasaki-Einstein manifolds, 査読有, Tohoku Math. J., vol.65, 2013, 243-252
DOI: 10.2748/tmj/1372182724

〔学会発表〕(計 6 件)

[1] T.Mabuchi: polybalanced metrics associated to extremal Kaehler metrics, Complex Geometry

Conference in honor of Prof.Ngaiming Mok, 2016年10月19日, 招待講演, KIAS, Seoul (Korea)

[2] T. Mabuchi: Strong K-stability for general polarizations, Recent Advances in Kaehler Geometry, 2015年5月19日, 招待講演, Vanderbilt University, Nashville (USA)

[3] T.Mabuchi: K-stability and strong K-stability, 2014年7月14日, 招待講演, Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing (China)

[4] T.Mabuchi: Donaldson-Tian-Yau's conjecture for general polarization, Ricci curvature: Limit Spaces and Kaehler Geometry, 2013年7月12日, 招待講演, ICMS, Edinburgh (UK)

[5] T.Mabuchi: The Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, The Asian Mathematical Conference 2013, 2013年7月1日, 招待講演, BEXCO, Seoul (Korea)

[6] T.Mabuchi: A new version of the Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, Workshop "Extremal Kaehler Metrics", 2013年5月28日, 招待講演, CRM, Montreal (Canada)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

満淵 俊樹 (MABUCHI, Toshiki)
大阪大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：80116102

(2)研究分担者

二木 昭人 (FUTAKI, Akito)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：90143247
(平成 27 年 6 月 19 日追加)

(3)連携研究者

中川 泰宏 (NAKAGAWA, Yasuhiro)
佐賀大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：90250662

新田 泰文 (NITTA, Yasufumi)
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：90581596

(4)研究協力者

()