

平成 28 年 10 月 24 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610020

研究課題名(和文) 複素2変数力学系の実3次元可視化について

研究課題名(英文) 3D visualization of complex 2-dimensional dynamics

研究代表者

石井 豊 (Ishii, Yutaka)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20304727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、2変数複素力学系に現れるジュリア集合などの重要な数学的オブジェクトを実3次元可視化技術を用いて表現し、そこから数学的に有用な予想を抽出したり、現在まで断片的にしか得られてこなかった(しかも表現が困難な)知見を理解可能な形でアーカイブ化することで、2変数の複素力学系における可視化と数学的理論との良好な関係を構築することにあった。本研究における具体的な成果としては、以下の3点が挙げられる。(1) 4次元から3次元への射影とレンダリングの非可換性。(2) 点集合として得られたジュリア集合の力学系的な補間法の確立。(3) 既存のジュリア集合の画像データを保存するシステムの構築。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this project is to visualize some mathematical objects generated by complex dynamics in dimension two by employing 3D virtual reality system, deduce mathematical conjectures through the visualized images, and create an archive to put several data of the images. The results we obtained consist of the following three points: (1) Non-commutativity of the projection from 4D to 3D and rendering, (2) Dynamical interpolation of the Julia sets as point cloud data, (3) Creation of an archive to preserve image data of the Julia sets.

研究分野：力学系理論

キーワード：複素ヘノン写像 ジュリア集合 可視化 ヴァーチャル・リアリティ

1. 研究開始当初の背景

複素1変数力学系の大域的挙動の研究が1980年代に入ってから爆発的進展を始めた決定的要因の一つは、コンピュータ・グラフィックスを用いてジュリア集合やマンデルブロー集合などを可視化できたことだと言われている。実際、この可視化を通して多くの実り多い数学的予想が得られ、その後の研究の適切な指針や方向性が得られた。ところが、複素2変数以上の力学系に対して上で述べた様な可視化と数学的理論の良好な関係は未だ構築されていない。その最大の理由は、複素多変数の場合にはその相空間の実次元が4以上になってしまい、通常の実2次元コンピュータ画面に映し出されるグラフィックスから有用な情報を抽出する事が難しいからである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、複素2変数力学系に現れる実4次元空間内の様々な数学的オブジェクトを、特殊な装置を装着してスクリーンに囲まれた空間に入ることによって3次元空間に没入できるCAVEと呼ばれる最新の可視化技術で表現する事によって、新たに発見した力学系的現象を広範な研究者にとって理解可能な形でアーカイブ化し、更にそこから力学系の大域的性質に関する知見や予想を抽出することで、1変数における1980年代の爆発的進展を多変数で再び起こす為の基礎を構築する点にある。

科学的な3次元オブジェクトを可視化する研究は、流体力学における流線の計算やプラズマ物理における乱流輸送など数多く存在し、その有用性は広く知られている。しかしその一方で、3次元オブジェクトを3次元可視化するのは、現実に存在するものを単にそのまま再現しているに過ぎない。実際、石井らは複数のプロジェクトについてのデモを神戸大学のCAVEで見せて頂いたが、中にはCAVEの卓越した能力が十分に引き出されていないと感じられる例も幾つか存在した。このことから、むしろ4次元オブジェクトを3次元可視化を通して理解することこそが、可視化というテクノロジーの強みをより発揮出来る状況なのではないかと着想するに至った。現在までのところ、4次元空間内のオブジェクトをリアルに「見る」、そしてそれを理論的研究に還元するという試みは存在しない。その理由としては、4次元空間が自然に現れるような対象が存在しなかったからであろう。その意味で、数学的にも物理的にも重要な背景を持つエノン写像や保存力学系の複素化は、実3次元可視化の

威力を最大限に発揮する上で最良の対象であると考えられる。以上が、申請者が複素2変数力学系を可視化しようとするアイデアに至った動機である。

実3次元空間内のオブジェクトを余次元1の2次元スライスや射影の情報から再構成するのがそれほど困難ではないように、実4次元空間内のオブジェクトの大域的情報を3次元のスライスや射影の情報から復元することは、余次元が2の場合に較べてはるかに容易であると期待される。この点が、複素2変数力学系に実3次元可視化技術を適用するという設定が「ちょうどいい」理由である。しかしその一方で、2次元から3次元の情報を再構築する困難さと3次元から4次元の情報を再構築する困難さがどれほど違うのか未知な部分もあり、既存の技術の拡張・高次元化を進めながら、その成果を元に不十分な点は本質的に新しい技術の開発も試みる。この点が、本研究で最もチャレンジ性の高い部分であると言えるだろう。

3. 研究の方法

本研究では具体的に以下に述べるような項目に基づき、研究を進める計画である。まず力学系から得られたデータを可視化する上での技術的な側面として、

(1) 力学系から生成された4次元のデータをCAVEで表示するアルゴリズムを開発する。

(2) 4次元空間内での回転を体験者が操作するインターフェイスを開発する。

これらで開発した技術を生かし、

(3) 力学系研究者が実際にCAVEでの体験を通して複素力学系の知見・予想などを得る。

(4) 得られた知見をアーカイブ化し、より多くの研究者がアクセス出来る方法を構築する。

(1)で達成すべき課題は、エノン写像のジュリア集合や保存力学系のKAM不変円の複素化などの、可視化したい力学系的オブジェクト上にとった点列をCAVEに入力できる形に変換することである。CAVEの入力は3次元データであるため、4次元のデータを3次元に射影する操作および3次元スライスをとる操作を実装する。また、力学系の構造をより詳しく把握するため、不安定多様体やKAMトーラスの複素化を点列としてではなく曲面として可視化する必要がある。そのため、計算機科学や可視化についての基本的技法を適用しつつ、新たな表現手法の導入を進める。

CAVE では、体験者は可視化された空間内を歩き回って様々な方向から対象を観察すると同時に、コントローラーを用いて対象に対して平行移動と回転を加える事で、対象の構造をより詳しく観察できるようになる。本研究が扱う4次元データの場合、変換のなす空間の次元が CAVE で通常扱う場合より大きくなるので、コントロールする方法を新たに開発する必要がある。これがステップ (2) である。どのような操作であれば体験者が4次元空間を把握しやすいかは自明でないため、様々な操作を試行錯誤しながら進める事になるであろう。このステップについては、連携研究者の森下の所属先である神戸大学システム情報学研究科が所有する π -CAVE (日本最大級の CAVE システム) を用いて実際に可視化された映像を視ながら最適な表現方法を追求する必要がある。この作業は、森下を中心に、申請者の石井、分担者の荒井、連携研究者の三波、の3名が神戸大学を訪問しつつ進める。

初年度の研究により、ジュリア集合などの可視化の基本的な部分は実現していると期待できるので、2年度目からは実際に力学系研究者に CAVE で可視化を体験してもらい、それにより新しい知見を得る試み (3) と (4) を進める。どの様な可視化や操作方法が4次元の把握に最適であるかは個人に依るところが大きいと予想されるため、各研究者の意見を聞きながら (1) と (2) のステップにフィードバックする作業も同時に進める。

まず (A) 複素エノン写像族 というテーマにおいては、相空間上でのジュリア集合の可視化と、パラメータ空間の可視化を相補的に進める。ジュリア集合の可視化については、表示すべきデータの生成法などは既に確立しているのでそれほど困難はないと予想される。一方、パラメータ空間の構造を見るために用いられているのは、力学系に付随するグリーン関数の critical point の挙動に基づく可視化である。本研究でも CAVE を用いて同様の可視化を進めるが、この手法では表示される構造が選んだ critical point に依存してしまうため、平行してホースシュー領域の可視化も行ない、相互に比較することでより深い理解を目指す。ホースシュー領域の計算は一般に困難であるが、研究分担者の荒井が開発した双曲性証明アルゴリズム (On hyperbolic plateaus of the Hénon map, *Experimental Math.*, 16:2 (2007), 181--188) を用いると、その大域的な構造を内側から数学的に厳密に近似することが可能であり、本研究ではこのアルゴリズムを応用する。

次に (B) 保存力学系の複素化 というテーマにおいて注目する KAM 不変円の複素化に関しては、計算機代数と精度保証付き数値計算

を併用することで KAM 不変円を定義する Lindstedt 級数の挙動を高精度に計算し、それにより自然境界を近似するという解析的な手法が考えられる。また、更にダイナミクスに即した方法として、力学系の有向グラフ表現を用いて KAM 不変円を抽出する手法も可能である。この方法は楕円的不動点の近傍では有効ではないが、ある程度離れた領域であれば KAM 不変円の構造を大域的に捉える事が期待できる。これらの手法を互いに組み合わせることで、多面的なデータを生成し、それを CAVE で可視化することで新たな知見を得ることを目指す。

ステップ (4) で進めるのは、上記のようにして得られた知見を集約して、それを CAVE のような大がかりな装置がない状況で活用し、より多くの研究者で共有出来るようにすることである。ここで想定している方法は、既にある程度普及している3次元ディスプレイや、今後普及すると予想される3次元プロジェクターなどの機器への転用である。これにより個人の研究室や研究集会におけるプレゼンなどでも4次元の可視化が可能になり、多くの研究者が (3) で得られた知見や予想を共有できるようになると期待される。基本的には (1) と (2) で開発した技術が使えるが、CAVE のようなヘッドトラッキング技術がないことと、コントローラーが簡易なものになるという制約の下である程度のリアリティを体験できるように表示を工夫する研究が必要である。また、3次元ディスプレイへのインターフェイスを専門とする関連研究者を招聘し、可視化画像のリアリティ向上のための手法について情報交換を行なう。

4. 研究成果

本研究における具体的な成果としては、以下の3点が挙げられる。

(1) 4次元から3次元への射影とレンダリングの非可換性。

実3次元空間内の対象物を1次元の低い2次元スライスや2次元射影の情報から再構成するのがそれほど困難ではないことから、実4次元空間内の対象物の大域的情報を3次元のスライスや射影の情報から復元することは不可能ではないと期待される。しかしその一方で、2次元から3次元の情報を再構築する困難さと3次元から4次元の情報を再構築する困難さがどれほど違うのかは全く非自明である。今年度はこの付加的な1次元をどのように表現するのが自然かという問題を、超立方体などの(フラクタルではない)単純な対象の場合について考察した。一般に、4次元対象物を3次元空間へ射影し

てからレンダリングすると、4次元対象物としてレンダリングしてから3次元空間へ射影するのでは結果は異なる。この射影とレンダリングの「非可換性」をさらに解析することによって、付加的な1次元の効果的な表現方法が発見できると期待している。

(2) 点集合として得られたジュリア集合の力学系的な補間法の確立。

我々が可視化したいジュリア集合は、複素2次元空間内の点集合データとして計算される。そのため、このデータを密度分布ないしはテクスチャと見なすか、レベルセットのように局所的には面モデルとして考えるか、無限に続く細部の構造をどう近似するか、などCGの意味での形状の定義を検討する必要がある。我々は特に、対象のジュリア集合のトポロジーがある程度理解出来ているケースである、拡大的多項式の小さな摂動として得られる複素ヘノン写像を考察した。この場合、ジュリア集合は局所的にはカントール集合とフラクタル的な曲線の直積として表されることが知られている。この様な写像を含むあるクラスの力学系に対して、申請者の石井はWarwick大学のJohn Smillieとの共同研究でhomotopy shadowing (Amer. J. Math. 132, no. 4, pp. 987-1029 (2010)) と呼ばれる手法を開発し、双曲的な力学系の不変集合をその近傍とホモトピー同値な対象の引き戻しを用いて近似することに成功した。この手法を上述の曲線の場合の技法と組み合わせることで、対象物のフラクタル集合を持つ自己相似性を反映した新しいレンダリング手法の提案を行った。

(3) 既存のジュリア集合の画像データを保存するシステムの構築。

初年度の段階では、我々のプロジェクトにおいて4次元可視化の方法はまだ開発途上の段階であった。そこでまずはCG画像のアーカイブ化に向けた第一歩として、京都大学の宇敷重広氏によって描かれた数々のジュリア集合の興味深い3次元画像を可視化した。複素ヘノン写像の相空間およびパラメータ空間はともに実4次元であり、その中で適切な領域やパラメータ値を独力で探索するにはあまりに高い次元である。そこで、興味深い現象が観察される座標・パラメータ値やその値に画像をフォーカスしていく過程などの計算データの詳細を確実に残せるようなシステムを構築することは、数値実験の再現性の観点からも重要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計0件)

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 豊 (ISHII, Yutaka)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：20304727

(2) 研究分担者

荒井 迅 (ARAI, Zin)
北海道大学・理学研究科・准教授
研究者番号：80362432

(3) 連携研究者

()

研究者番号：