

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 24 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25780200

研究課題名(和文) オプション・グリークス計算の新手法

研究課題名(英文) A new computation methodology for option Greeks

研究代表者

室井 芳史 (Muroi, Yoshifumi)

東北大学・経済学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90448051

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：離散モデルで高精度にバリア・オプション価格の計算を行うには高メッシュのモデルを利用する必要がある。そのようなモデルにおいても極めて高速に価格計算が可能なアルゴリズムを開発した。また、オプション価格のパラメータ感応度は金融実務では重要なリスク指標であるが、一般的な商品であるアメリカン・オプションの感応度の計算法は余り研究が多くない。そこで、容易にマリアバン解析の理解を可能とする手法(離散マリアバン解析)を提案し、各種のオプション感応度の計算法を開発した。これらの手法は金融実務で利用されていくと考える。

研究成果の概要(英文)：In order to evaluate the price of barrier options using binomial tree methods, one has to construct very high mesh trees, but it is a time consuming approach. We introduce a new very efficient algorithm to compute the price of barrier options using binomial tree methods. Computation of Greeks (sensitivity of option price) is also very important task at the financial business practices. We introduce a new approach, the discrete Malliavin calculus, to compute the sensitivity of option prices with respect to the model parameter. This method enables us to evaluate Greeks for many kinds of financial derivatives efficiently.

These results are published at the high quality peer review journals such as Journal of Computational and Applied Mathematics, European Journal of Operational Research, and Journal of Economic Dynamics and Control.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：数理ファイナンス 金融派生商品 数値計算法

1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスでは 2000 年頃よりオプション価格のモデル・パラメータに対する感応度(グリークス)の計算法について多くの研究が行われてきた。グリークスの計算を行おうとするために、例えば直接数値微分を行うと、計算結果が不安定になるなどの問題が指摘されてきた。そこで、多くの研究ではマリアバン解析とモンテ・カルロ・シミュレーションを組み合わせる方法が取られることが多かった。このアイデアは多くのモデルや金融派生商品のグリークスの計算に対しても取り入れられた。例えば、原商品価格過程が幾何ブラウン運動に従うモデル(ブラック・ショールズ・モデル)だけではなくジャンプ拡散過程やレヴィ過程などさまざまなモデルに対して適用された。また、プレーン・バニラ型のオプションのみならず、ノックアウト・オプションやルックバック・オプションといった経路依存型商品やアメリカン・オプションのグリークスの計算にも用いられ多くの研究がなされてきた。

2. 研究の目的

背景で述べたとおり、オプション・グリークスの計算法に関する研究は数多くの研究蓄積があり、既にほとんど全てのモデルでほとんど全ての金融商品について研究されているといっても過言ではない。そのような中で、マリアバン解析を用いる方法は一般の実務家には数学的に難解であるものと思われた。また、アメリカン・オプションのように早期行使権が付いた金融商品の解析にはモン・カルロ法よりもバックワード・インダクションのような古典的な手法の方が自然な計算にも感じられた。そこで、2 項分岐木モデルに代表される離散モデルを用いたグリークスの計算法を提案することでオプション・グリークスを簡便に計算する方法を考えることや、アメリカン・オプションのグリークスの計算を行うことを目指し研究を行うこととした。特に、ジャンプの入ったモデルにおいて、アメリカン・オプションのグリークスの計算を行えるようにすることが一番大きな目的であった。

3. 研究の方法

本来、ブラウン運動の汎関数の解析であるマリアバン解析を 2 項分岐木モデルのようなベルヌイ・ランダム・ウォーク上で定義し、その結果を用いてグリークスの計算を行うことを目標とした。すなわち、無限次元の解析であるマリアバン解析を有限次元で実現し、その結果を用いてグリークスの計算を行うことを目指した。一旦、この方法が確立したら再結合するジャンプの項が入る場合を含めた広い意味での 2 項分岐木上でグリークスの計算が可能となる。また、この手法はツリー全体に対して差分を取りグリークスを計算することとなるが、これを敢えて 1 ステ

ップずつ行えば、バックワード・インダクションのアルゴリズムと組み合わせることでアメリカン・オプションのグリークスの計算も可能となる。このように、マリアバン解析を 2 項分岐木上で実現することでグリークスの計算を行った。

4. 研究成果

ここまで述べてきた 2 項分岐木を用いたオプション・グリークスの計算法を中心に 2 項分岐木を用いたオプション価格評価の分析について研究成果を出してきた。また、それとは別にアジアン・オプションのグリークスの性質についても研究を行ってきた。これらの研究成果についてひとつずつ述べていくこととする。

(1) 2 項分岐木を用いた経路依存型金融商品の価格評価について研究を行った。離散モデルで高精度にバリア・オプション価格の計算を行うには高メッシュのモデルを利用する必要があることはよく知られた事実である。ところが、高メッシュの離散モデルを用いた数値計算を行うと計算時間が長くなってしまふ。そのようなモデルでも極めて高速にバリア・オプションの価格計算をするアルゴリズムを開発した。例えば、ダブルノックアウト・オプションの計算に 10^9 ステップの 2 項分岐木を用いた場合、通常行われている方法では 2 日計算機を回し続けても解を得ることができなかった。ところが、偏微分方程式の変数分離法による価格計算法を参考にしたアルゴリズムを提案したところわずか 0.1 秒未満で価格の計算ができるようになり、私の知る範囲で 2 項分岐木による数値計算としては最速である。この方法を提案することによりさまざまなペイ・オフを持つノックアウト・オプションの価格計算を極めて高速かつ高精度に計算ができるようになった。

(2) ベルヌイ・ランダム・ウォークの汎関数の差分の理論である離散マリアバン解析を導入することで、ヨーロッパン・オプションのグリークスの計算を行った。マリアバン解析はブラウン運動の汎関数の微分(変分)の理論であり数学の研究者を中心に研究が行われてきた。この理論と平行な議論を有限次元で実現することでマリアバン解析を簡単に理解することが可能となった。特に、ウィナー・カオス展開やウィック積、スコロホッド積分などのベルヌイ・ランダム・ウォーク上での理論についても議論を行った。その上で、離散マリアバン解析をオプション・グリークスの計算に応用した。すなわち、微分をベルヌイ・ランダム・ウォークの差分に置き換えてグリークスの満たすべき公式を導き、それをバックワード・インダクションで数値計算を行うことでオプション・グリークスを高速かつ高精度に計算することができるようになった。

(3)アメリカン・オプションなどの金融商品の価格計算ではバックワード・インダクション・アルゴリズムを用いて価格計算を行うことが多い。ヨーロピアン・オプションのグリークス計算においてはオプション価格をベルヌイ・ランダム・ウォークの汎関数とみなして一度だけ差分を取ったが、ステップごとに差分を取ればアメリカン・オプションのような早期行使権が付いた金融派生商品のグリークス計算が可能となるのではないかと予想される。今回の研究では単純なベルヌイ・ランダム・ウォークに留まらずジャンプ拡散過程を近似するような2項分岐木についてもこのような操作が可能であることを示した。この方法を用いることでジャンプ拡散過程モデルにおいても高精度にアメリカン・オプションのグリークスの計算が可能であることを示した。アメリカン・オプションのグリークスの先行研究はあまり数が多くなく、実務的にも意義の大きな研究成果であると考えている。

(4)アジアン・オプションのグリークスのうち、ボラティリティ、金利水準、満期までの時刻に対する感応度であるベガ・ロー・テータについて関係式があることが見付き、それについて研究の発表を行った。偏微分方程式を用いると、実は、ヨーロピアン・オプションについても同様の関係式が成り立つことが簡単に示されるが、アジアン・オプションについては知られていない結果であるものと思われる。(ヨーロピアン・オプションについても過去に指摘があったかどうかも良く分からない。)アジアン・オプションにおいては細かな確率的な計算を行うことで得られる関係式であり興味深いものとする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

T. Liu and Y. Muroi, A Simple Relationship between Greeks for Asian Options, International Journal of Financial Markets and Derivatives, 査読あり, 4 巻, 2015 p195-202

S. Suda and Y. Muroi, Computation of Greeks using Binomial Trees in a Jump-Diffusion Model, Journal of Economic Dynamics and Control, 査読あり, 51 巻, 2015, p93-110

Y. Muroi and S. Suda, Discrete Malliavin Calculus and Computations of Greeks in the Binomial Tree, European Journal of Operational Research, 査読あり, 231 巻 2013, p349-361

Y. Muroi and T. Yamada, Spectral Binomial

Tree: New Algorithms for Pricing Barrier Options, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読あり, 249 巻, 2013, 107-119

[学会発表](計 3 件)

室井芳史, 特異摂動法を用いたジャンプ確率ボラティリティ・モデルにおけるオプション評価について, 2015 年 1 月 日本金融・証券計量・工学学会 (JAFEE) 2015 年度冬季大会 慶應義塾大学(東京都港区)

Y. Muroi, Computation of Greeks in the jump-diffusion model using discrete Malliavin calculus, 2014 年 12 月 17-20 日 The Quantitative Methods in Finance 2014 Conference シドニー(オーストラリア)

Y. Muroi, Computation of Greeks using Binomial Trees in a Jump-Diffusion Model 2013 年 12 月 17-20 日 The Quantitative Methods in Finance 2013 Conference シドニー(オーストラリア)

[図書](計 件)

[産業財産権]
出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

室井 芳史 (MUROI YOSHIFUMI)
東北大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：90448051

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：