

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 20 日現在

機関番号：34412

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800043

研究課題名(和文)写像類群を用いた4次元多様体の構成とその応用

研究課題名(英文)Construction of 4 dimensional manifolds using mapping class groups and its applications

研究代表者

門田 直之(MONDEN, NAOYUKI)

大阪電気通信大学・工学部・講師

研究者番号：60611986

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：4次元トポロジーにおいて重要な役割をなすLefschetz fibration, Lefschetz pencil について写像類群を用いて研究した。特に、Lefschetz pencilのオイラー標数に関する問題の解決、存在は知られていたが具体例がなかった結果に対する具体例や新しい性質を持つ具体例を構成した。そこで得られた技術の応用として、写像類群の安定交換子長の結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied Lefschetz fibrations and Lefschetz pencils, which play an important role in 4-dimensional topology, using mapping class groups. In particular, we solved a problem on the Euler characteristics of Lefschetz pencils and constructed explicit examples that their existence are known but there are no example or that they have new properties. Moreover, as an application of the techniques we obtained in the study, we gave a result on stable commutator lengths in mapping class groups.

研究分野：幾何学

キーワード：Lefschetz fibration Lefschetz pencil symplectic 4-manifold mapping class group stable commutator length

1. 研究開始当初の背景

ドナルドソン理論、ゲージ理論などの出現により劇的に進展した4次元多様体の研究であったが、その全体像となると未だ漠然としている。そこで、様々な具体例の構成により4次元多様体全体の振舞いを調べようという研究が行われている。このような経緯のもと、研究代表者はLefschetz fibrationの構造が入る4次元多様体の構成に取り組んできた。加えて、その応用として写像類群の安定交換子長の問題の解決にも取り組んだ。

4次元多様体におけるLefschetz fibrationの構造の重要性は、4次元シンプレクティック多様体とほぼ同値であることに由来する。また、写像類群のある関係式がLefschetz fibrationと対応することから、組合せ的な議論で具体例を構成することができる。この理由から、Lefschetz fibrationは活発に研究されてきた。

研究開始以前の研究代表者の関連する研究内容を詳しく述べると、次の5つが挙げられる：

- (1) ファイバーの種数が2のLefschetz fibrationのオイラー標数の最小値をほぼ決定した。
- (2) 最大自己交差数のsectionを持つLefschetz fibrationはファイバー和分解不可能であることを示し、最大自己交差数の値を決定した。また、そのようなLefschetz fibrationのオイラー標数には上界がないことを示した。
- (3) Lefschetz fibrationから定まるオイラー標数と符号数の組(つまり地誌学)におけるHainの予想の反例を無限個構成した。
- (4) (2)で得られた写像類群の関係式を用いて、境界に平行な単純閉曲線に沿うDehn twistの安定交換子長を決定した。
- (5) 閉曲面の写像類群のDehn twistの安定交換子長に対し、種数に依存して減少するような上界を与えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、理論から予想される4次元多様体やLefschetz fibrationの存在領域(例えば地誌学)に対し、どこまで具体例を構成することができるかを写像類群の立場から解明していくことである。その際、写像類群の関係式の新しい構成法を開発し、応用として、写像類群の安定交換子長の諸問題の解決に取り組む。

具体的には次の3つである：

- (1) 4次元シンプレクティック多様体のLefschetz fibrationにおいて、存在不可能領域がわかっている部分(Parshin-Arakelov不等式など)に対し、その不等式を満たす例を可能な限り広い範囲に構成する。
- (2) 予想されている不等式(Bogomolov-宮岡-Yau不等式など)に対し、予想の反例を構成する。
- (3) 予想の反例が見つかったような不等式

(例えばslope不等式など)に対し、どこまで例が構成されるか確認する。また、それに対し新たな不等式を与える。

(4) 最大自己交差数のmulti sectionを持つLefschetz fibrationを構成する。また、Lefschetz fibrationのsectionの自己交差数の取り得る値の範囲を決定する。

(5) (1)や(2)の例を構成する際に得られた写像類群の関係子や技術を用いて、Dehn twistの安定交換子長の上界を改善する。可能であれば決定する。

3. 研究の方法

Lefschetz fibrationの研究手法は様々である。方法の1つは4次元シンプレクティック幾何の観点から行う方法である。例えば、サイバーク・ウィッテン不変量やゲージ理論が挙げられる。他には、写像類群やKirby計算などを用いた位相的、組み合せ的な方法がある。研究代表者の方法は主に後者の(写像類群を使った)手法であるが、時折、前者の手法も扱う。具体例を構成する場合は後者であり、これ以上例が構成できないことを証明するときに前者を使う。次の研究成果を得る際に用いた方法は次のようなものである。

(1) Fullerにより考え出された手法の1つである、Lefschetz fibrationに対応する写像類群の関係式の一部分に対し、関係式の置き換えを行う。また、関係式の置き換えを行う際、ある写像の共役を施して行う。これはAurouxにより考えられた方法である。これまでの研究の多くは、どちらか一方を用いていたが、研究代表者はこれら2つ方法を組合せて用いた。

(2) Lefschetz fibrationのsectionの個数を増やす方法として、Ozbagci-Korkmazのものが知られている。彼らはLantern relationを帰納的に用いることでsectionを1つずつ増やしていく方法であったが、研究代表者はDaisy relationを用いる方法を考え出した。これにより、一度に多くのsectionを構成することができる。

(3) これまでの研究代表者の結果から、Dehn twistの安定交換子長の上界を与える方法には、写像類群の関係式の変形とBavardの双対定理が有効であることがわかっている。より上手い式変形を行うことで、上界の改善を行う。

4. 研究成果

(1) 代表的な3つのLefschetz fibrationに対し、一般化された有理ブローダウンをほどこし、それらがLefschetz fibrationの構造と(-1)-sectionを持つことを示した。特に、また、それらに結び目手術を行い、エキゾチックな多様体の族を構成した。これはAnar Akhmedov氏との共同研究である。

一般化された有理ブローダウンを行ったこれまでの例は(-1)-sectionを持つ

たなかった。Lefschetz fibration が (-1)-section を持つと Lefschetz pencil が得られる。Lefschetz pencil 構造は4次元シンプレクティック構造と同値であるため、得られた例は新しい Lefschetz pencil の構成に役立つと考えられる。

- (2) 任意の有限表示群を基本群として持ち、さらに (-1)-section を持つような Lefschetz fibration に対応する写像類群の関係式を具体的に与えた。これは小林竜馬氏との共同研究である。

ここで使われた手法は、(1)と同様に Lefschetz pencil の構成に役立つと思われる

- (3) (-1)-section を持つ Lefschetz fibration のオイラー標数は、(-1)-section の個数によって有界・非有界となることを示した。また、オイラー標数がある場合、最大値を決定した。これは R. Inanc Baykur 氏と Jeremy Van-Horn Morris 氏との共同研究である。

上記の結果は、Lefschetz pencil のオイラー標数の取り得る値が有界か非有界かを問う Smith の問題に完全な解答を与えたことになる。

- (4) (-1)-section を持ち、単連結な Lefschetz fibration で slope 不等式を満たさないものを構成した。また、(-1)-section を持ち、基本群が $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}n$ となる Lefschetz fibration を構成した。よってこれら例は非正則である。これは、濱田法行氏と小林竜馬氏との共同研究である。

これまでに構成された (-1)-section を持つ非正則で単連結な Lefschetz fibration のファイバーの種数は 3, 4, 5 であり、数例しかなかった。一方、得られた例は 3 以上のすべての種数に対してである。また、単連結でない例は、ファイバーの種数が 3 に限り無限個の例があるのみであったが、得られた例により 3 以上のすべての種数に対し、それぞれ無限個の例があることがわかった。

- (5) 分離的な単純閉曲線についての Dehn twist の安定交換子長の種数に依存して減少する上界を与えた。これは吉原和也氏との共同研究である。

分離的な単純閉曲線についての Dehn twist の安定交換子長の上界は種数に依存しないもののみが知られていた。よって、安定交換子長の決定に一步近づいた研究と言える。

- (6) Lefschetz fibration に関するサーベイを出版した。

このサーベイには、豊富な具体例とそれに対応する写像類群の関係式を載せており、写像類群の観点から Lefschetz fibration の話題を書いている。このことから、Lefschetz fibration を知らない

写像類群の研究者にとって意味のあるものだと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Naoyuki Monden and Kazuya Yoshihara, On stable commutator lengths of Dehn twists along separating curves, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, to appear. 査読あり

R. Inanc Baykur, Naoyuki Monden and Jeremy Van Horn-Morris, Positive factorizations of mapping classes, *Algebraic and Geometric Topology*, to appear. 査読あり

Ryoma Kobarashi and Naoyuki Monden, Lefschetz pencils and finitely presented groups, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.282, no.2, 359—388, 2016. 査読あり

Anar Akhmedov and Naoyuki Monden, Constructing Lefschetz fibrations via daisy substitutions, *Kyoto Journal of Mathematics*, Vol.56, no. 3, 501—529, 2016. 査読あり

[学会発表](計4件)

R. Inanc Baykur, 門田直之, Jeremy Van Horn-Morris, Positive factorizations of mapping classes, 日本数学会 2015 年度年会トポロジー分科会一般講演, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学駿河台キャンパス Naoyuki Monden, Twisted substitutions and fundamental groups of Lefschetz fibrations, Workshop on Topology and Invariants of 4-Manifolds, 2014 年 8 月 26 日, Stony Brook University (Simons Center for Geometry and Physics), アメリカ

門田直之, Non-holomorphic Lefschetz fibrations with (-1)-sections, Friday Seminar on Knot Theory, 2014 年 4 月 25 日, 大阪市立大学杉本キャンパス

門田直之, 代表的なレフシェッツ束空間の有理ブローダウン, 研究集会「写像類群における関係とレフシェッツ束空間」, 2014 年 3 月 19 日, 九州工業大学サテライト福岡天神

[図書](計1件)

Naoyuki Monden, On the Geography of Lefschetz fibrations, *Handbook of Group Actions (Vol. II)*, ALM32, 297--330; published jointly by Higher Education Press and International Press Beijing-Boston(editor: Athanase

Papadopoulos, Lizhen Ji and S.-T. Yau),
2015. 査読あり

〔その他〕(計3件)

関係式の置き換えと関係式の共役による
置き換えを組み合わせて得られた非正則
な Lefschetz pencil に関する資料:

Noriyuki Hamada, Ryoma Kobayashi and
Naoyuki Monden, Non-holomorphic
Lefschetz fibrations admitting a
(-1)-section, arXiv:1609.02420
<https://arxiv.org/abs/1609.02420>

松本幸夫氏の種数2の Lefschetz
fibration の例にファイバー和を施し、
さらに有理ブローダウンを施して得られ
た種数2の Lefschetz fibration に関す
る資料:

Anar Akhmedov and Naoyuki Monden,
Genus two Lefschetz fibrations with
 $b^+_2=1$ and $c_1^2=1$,
arXiv:1509.01853:

<https://arxiv.org/abs/1509.01853>

関係式の置き換えと、関係式の共役によ
る置き換えを組み合わせて得られた任意
の有限表示群を基本群としてもつ
Lefschetz pencil に関する資料:

Ryoma Kobayashi and Naoyuki Monden,
Lefschetz pencils and finitely
presented groups, 数理解析研究所講究
録, Vol.1922 (2014.10), 84-89.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

門田 直之 (MONDEN NAOYUKI)

大阪電気通信大学・工学部・講師

研究者番号: 60611986

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

AKHMEDOV ANAR

Baykur R. INANC REFIK

濱田 法行 (HAMADA NORIYUKI)

VAN-HORN MORRIS JEREMY

小林 竜馬 (KOBAYASHI RYOMA)

吉原 和也 (YOSHIHARA KAZUYA)