

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：25800064
研究課題名(和文) ランダムウォークの軌跡の構造について

研究課題名(英文) On structure of random walk traces

研究代表者

白石 大典 (Shiraishi, Daisuke)

京都大学・情報学研究科・講師

研究者番号：00647323

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では国内外の研究者との議論および共同研究により、以下の事柄を達成した。ひとつはLoop-erased random walk (以下LERW)の長さの増大指数の存在を証明した。LERWはランダムウォークのパスからループを取り除いて得られるランダムな単純曲線モデルである。3次元の場合が最も解析が困難であることが知られているが、その場合にLERWの長さに関する詳細な評価を導き出し、増大指数の存在を証明した。ふたつめの成果として、このLERWのスケール極限と、ループ空間上の適切なポアソン点過程を合わせることによって、ブラウン運動の軌跡の分解を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I got the following results. The first main result is to show the existence of the growth exponent of the loop-erased random walk (LERW) in three dimensions. LERW is a random simple path obtained by erasing all loops from a random walk path, which was introduced by Greg Lawler in 1980s. Both in math and physics literatures, it is known that the most difficult case is in three dimensions. I derived such existence of the exponent in three dimensions by establishing a number of delicate estimates on LERW. The second main result is to give a decomposition of a trace of the Brownian motion as follows. I showed that the union of the scaling limit of LERW and a suitable Poisson point process on a loop space is (in law) the Brownian motion. This decomposition can be seen as an analog of Ito's excursion theorem in one dimension.

研究分野：確率論

キーワード：ランダムウォーク ブラウン運動

1. 研究開始当初の背景

(1) 21世紀に入ってから、統計物理に起源を持つ2次元格子モデルあるいはそのスケール極限の研究は飛躍的に進んだ。それは共形不変性に基づいた共形場理論を数学的に厳密に扱えるようになったからである。しかしながら物理的にも数学的にも最も重要な3次元の場合には、対応する理論構築がなされておらず、未解明の部分が多く残されている状態である。本研究においてこのような未解明の部分を少しでも理解を進めることが当初の目標である。3次元の場合は2次元の場合のような良いconformal structureがないわけであるが、これまで得られている知見をもとに、新しい理論の構築が必要となる。

(2) ランダムウォークやそのスケール極限に当たるブラウン運動の軌跡の種々の性質を調べることは、古くより多くの研究者によってなされてきた。本研究では未だ解決されていないそのような軌跡の性質を明らかにしていくことが目標である。その際、高次元ブラウン運動の軌跡は単純曲線になるので、研究対象は低次元ブラウン運動あるいはランダムウォークの軌跡に焦点を当てる。ブラウン運動の持つfractal natureをより精密な形で理科することが鍵となる。この方向の研究を進めるには、ブラウン運動のみならず、そこから派生する統計物理モデルの解析も重要となる。

2. 研究の目的

(1) 本研究では3次元 loop-erased random walk (LERW) および uniform spanning tree (UST) の解析を進めることを目的とする。これらは統計物理に背景を持つ格子モデルである。このモデルが持つcritical exponentの存在あるいはその評価を与えることが目標となる。さらにスケール極限との関係を調べることも重要な問題となる。格子モデルと

スケール極限の関係についての古典的な研究の代表例としてはランダムウォークがブラウン運動に収束するというものがある。しかしながらLERWのような非マルコフ過程に対しては、スケール極限との関係は不透明な状態である。このような理解の進んでいない部分を国内外の専門家との議論を通してより明確にしていくことが本研究の目的である。

(2) 低次元ブラウン運動は単純曲線にはならず、多くのループを持つことが証明されている。さらに低次元ランダムウォークも同様に多くのループを持つ。これらは、ブラウン運動のhitting probabilityが調和関数になるというポテンシャル論からのアプローチによって証明された古典的な結果である。しかしながらそのような調和解析からのアプローチだけでは、ブラウン運動のループの集合がどのようなものかという問いには答えることができない。本研究の目標は、1次元における伊藤のエクスカージョン理論を多次元に拡張することによって、ブラウン運動のループの集合をループ空間上の適切なポアソン点過程によって表現することである。またそのような分解を用いてブラウン運動に対する幾何学を進めていくことも重要な目標と言える。

3. 研究の方法

(1) 3次元LERWに関しては、「増大指数の評価」と「スケール極限の存在」の二つの結果がすでに得られている。これらの結果を得たシカゴ大学のGreg Lawler氏やWeizmann科学研究所のGady Kozma氏との議論を重ねることで研究を進めていく。さらにUSTはWilsonのアルゴリズムによってLERWによって生成される。このアルゴリズムとLERWの知見を合わせて、USTの研究を推し進める。

(2)ランダムウォークの軌跡に関しては、それを単純曲線とループの集合に分解することはすでになされている。本研究ではその極限を考えることでブラウン運動の同様の分解を与える。そこではLERWとそのスケール極限の関係性を深く理解することが必要となる。さらに適切なループ空間の上のポアソン点過程の研究も推し進める必要がある。

4. 研究成果

(1)本研究において、3次元LERWの長さに関する増大指数が存在することを証明した。この指数の存在を示すに当たって、LERWに関する多くの有益な評価を導き出した。先に述べたようにLERWのスケール極限の存在はすでに示されていたが、増大指数の存在はよりquantitativeな考察が必要となり全くもって非自明な問題である。本研究において多くの問題を克服しその存在証明に至った。

(2)LERWの増大指数の存在を証明する過程の中で、お互いに交差しないように条件づけられた二つのランダムウォークの解析を行った。本研究において、この条件づけられたランダムウォークが理想的なエルゴード性を満たすことを示した。こうしたエルゴード性を用いて従来のエルゴード理論とランダムウォークの幾何を関係づけることに成功した。

(3)LERWのスケール極限が単純曲線になることを証明した。LERWはその定義から単純曲線であるが、そのハウスドルフ極限が再び単純曲線になるかどうかは全く非自明な問題である。本研究によってそのことがすべての次元に対して正しいことが結論付けられる。単純曲線格子モデルは数多く存在するが、そのスケール極限が再び単純曲線になることをすべての次元で証明できているのはこのLERWだけである。

(4)LERWのスケール極限のハウスドルフ次元が先に述べたLERWの増大指数と一致することを証明した。一般にハウスドルフ次元の評価を行う際には、Frostmanの補題を使うのが常套手段であり、本研究でもそれをういた。その際、スケール極限に対するある種のエネルギー評価を行うことが必要となる。本研究ではそのエネルギー評価を行うことに成功し、スケール極限のハウスドルフ次元が確率1であるdeterministicな値をとることを証明した。

(5)ランダムウォークのループの集合はrandom walk loop soupと呼ばれるループ空間の上のポアソン点過程で与えられる。本研究ではその極限にあたるBrownian loop soupを考察し、これとrandom walk loop soupとの誤差の精密な評価を与えた。その際にブラウン運動とランダムウォークの強い近似を適切に用いることが鍵となる。

(6)ブラウン運動の軌跡をLERWのスケール極限とそれに交差するBrownian loop soupの和集合で与えた。この分解によりブラウン運動のループの集合はloop soupで与えられることが証明できたことになる。このようにあるループ空間の上のポアソン点過程によってループを表現する精神は、伊藤清による1次元のエクスカージョン理論に見いだすことができる。2次元および3次元の場合は、1次元の場合とは異なり点再帰ではないので、直接伊藤理論を適用することはできない。本研究ではこの困難を克服し伊藤のエクスカージョン理論の多次元版に当たる結果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Daisuke Shiraishi. Random walk on non-intersecting two-sided random walk trace is sub-diffusive in low dimensions. Transactions of the American Mathematical Society, to appear. (査読有)

Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. Annals of Probability, to appear. (査読有)

Daisuke Shiraishi. Hausdorff dimension of the scaling limit of loop-erased random walk in three dimensions, Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics, to appear (査読有)

[学会発表](計11件)

Daisuke Shiraishi. Non-intersecting random walks in low dimensions. Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics. 5 August 2013. 北海道大学

Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. 12th workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems. 21 November, 2013. 東京大学

Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. 確率論シンポジウム. 2013年12月18日 京都大学数理解析研究所

Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. Seminar on stochastic processes. 12 November 2014. ETH Zurich.

Daisuke Shiraishi. Loop-erased random walk in three dimensions. Random Motion in Random Media. 2015年4月1日. TU Eindhoven.

Daisuke Shiraishi. Loop-erased random walk. Probability at Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences in Leipzig. 13 May 2015. Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences in Leipzig.

Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in 3 dimensions. Probability at Cambridge. 10 May 2016. University of Cambridge.

Daisuke Shiraishi. Geometry of Brownian motion. 確率論と幾何学. 2016年10月27日. 京都大学数理解析研究所

Daisuke Shiraishi. On loops of Brownian motion. 大規模相互作用系の確率解析. 2016年11月2日. 東大数理

Daisuke Shiraishi. On loops of Brownian motion. Probability and Statistical Physics Seminar at University of Chicago. 10 February 2017. University of Chicago.

Daisuke Shiraishi. Geometry of Brownian motion. 岡山 - 広島 解析・確率論セミナー 2017. 2017年2月21日 岡山大学

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

白石大典 (SHIRAIISHI Daisuke)

京都大学・大学院情報学研究科・講師

研究者番号：00647323

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()