

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800068

研究課題名(和文)ハミルトン系に由来する確率モデルに対するスケール極限

研究課題名(英文)Scaling limit for stochastic models originated from Hamiltonian dynamics

研究代表者

佐々田 槇子(SASADA, Makiko)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：00609042

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、物理現象や社会現象などのミクロスコピックな数理モデルとして得られる確率モデルから、そのマクロな性質を導出するためのスケール極限の手法を確立することを目的としたものである。特に、ミクロモデルとして、古典物理の基礎的かつ重要な系であるハミルトン系に由来するモデルを対象とした。成果として、確率的な摂動項を加えた非線形ハミルトン系のエネルギーのマクロな揺らぎが従う確率微分方程式を初めて厳密に導出した。また、スケール極限で0になるような摂動の場合に、その0への近づき方に依存して、マクロな振る舞いが質的に異なることを示した。

研究成果の概要(英文)：This project aims to establish the scaling limit for microscopic stochastic models obtained as models of physical and social phenomena to obtain their macroscopic properties. In particular, we focus on stochastic models originated from Hamiltonian dynamics, which is one of the most fundamental dynamics in the classical physics. We succeed to derive rigorously a stochastic partial differential equation from a nonlinear Hamiltonian dynamic with stochastic noise as its macroscopic fluctuation of energy. Also, we study the case where the strength of the noise goes to 0 in the scaling limit and show that the macroscopic behavior depends on the speed of this convergence.

研究分野：大規模相互作用系の確率解析

キーワード：流体力学極限 ハミルトン系 非勾配型 スペクトルギャップ

1. 研究開始当初の背景

本研究は、統計物理学に数学的な基礎づけを与えることを目標として始まった、確率解析を用いた大規模相互作用系に関する一連の研究を背景とするものである。

統計物理学は、流体や気体等の巨大な自由度を持つ系のマクロな熱力学的性質の時間発展を、原子や分子等のミクロなレベルの力学的運動法則から説明する学問である。統計物理学において、エルゴード仮説や局所平衡等いくつかの重要な仮定があるが、これらを一般の決定論的なモデルに対し数学的に厳密に証明することはほとんど不可能と考えられている。そこで、決定論的でない確率過程をミクロモデルとする研究が盛んに行われ、統計物理学の考え方を数学的に基礎づける様々な手法が確立されてきた。こうした確率解析に基づく大規模相互作用系の研究は、国内外で非常に広く行われており、現在も盛んに研究されている。特に系に時間発展のある非平衡状態の研究については、非平衡統計物理学そのものが未完成であり、数学的基礎付けにとどまらず非平衡統計物理学そのものを発展させていくと期待されている。

ミクロな系を与える確率モデルから、そのマクロな性質を導出する重要な手法がスケール極限である。より具体的には、ミクロな系の時間発展を表す確率過程を、時間と空間について適切なオーダーの比でスケール変換し、そのスケールパラメータに極限操作を行うことで、マクロなパラメータの時間発展が従う**偏微分方程式**を導くことが目標である。この過程は、標語的に流体力学極限と呼ばれる。これは、一種の大数の法則である。この大数の法則に付随し、その周りでの揺らぎを調べる揺動問題も重要なテーマである。これは流体力学極限に対応した中心極限定理である。ミクロな系の時間発展を表す確率過程の揺らぎを、適切にスケール変換し極限操作を行うことで、マクロなパラメータのゆらぎが従う**確率偏微分方程式**を導出するのが、揺動問題の目標である。

流体力学極限、およびこれに付随する揺動問題は、いまだに十分な理論が完成されていない非平衡系に対する統計物理学の主要なテーマとして、1980年代後半頃より盛んに研究されてきた。一連の研究の中でも、Guo等が[1]で導入したエントロピー法と呼ばれる証明は、様々なタイプの確率モデルに適用できる画期的な手法であった。しかし、この手法はモデルの時間発展規則が勾配条件と呼ばれる強い条件を満たすことを要請している。一方で、物理的に興味深い系のほとんどが勾配条件を満たさない非勾配型であり、現実の物理現象の理解のためには、非勾配型モデルについて研究することが不可欠であった。Varadhanは[2]でエントロピー法を非勾

配型のモデルにも適用できるよう拡張したが、この証明は、非常に難解であり、各モデルに適用可能かどうかはそれぞれ個別の議論が必須である。そのため、非勾配型モデルに対するスケール極限の研究の進展は遅く、いまだ発展途上である。特に、決定論的なモデルに由来する系のスケール極限の研究は、数学者、物理学者の双方にとって重要な課題であるが、技術的困難によりこれまでほとんど結果が得られていなかった。そこで、決定論的なモデルに由来する様々な確率モデルに対するスケール極限の問題に取り組みようと考えたことが、本研究の着想に至った経緯である。

2. 研究の目的

(1) 本研究の第一の目的は、ハミルトン系に確率的なノイズ項を加えたモデルに対するスケール極限により、そのマクロな振る舞いを理解することである。特に、ノイズを様々な変化させた時、どのような普遍的な性質が現れるかを明らかにすることが、本応募研究の目標の一つである。また同時に、ノイズの大きさを極限操作により0にした時に、どのような変化が現れるかを明らかにし、確率モデルと決定論的モデルの関係を明らかにする。

(2) 本研究の第二の目的は、Stochastic energy exchange model (以下 SEEM) と呼ばれる、決定論的なハミルトン系に由来するエネルギーの時間発展モデルに対する流体力学極限の証明である。このモデルは、決定論的な相互作用粒子系のメソスコピックモデルとして得られるエネルギーに関する普遍的なモデルである。

3. 研究の方法

ハミルトン系からの熱伝導方程式の導出は、当該分野における重要なテーマであり、長年多くの研究が行われてきた。しかし、この問題では非勾配型の系を扱う必要があるために、流体力学極限や揺動定理の厳密な証明のためには多くの困難が残されていた。また、ハミルトン系に由来する確率モデルとして、近年 SEEM に代表される新しいモデルが導入されているが、こうしたモデルに対するスケール極限の研究はまだほとんど行われていない。

研究代表者は、すでに確率的なノイズ項をもつ次元非調和振動子鎖に対する平衡揺動定理についての結果を得ていたが、これをさらに一般的な非勾配型モデルへ拡張することが重要である。

そこで、非勾配型モデルに対する新しいアプローチを模索する。より具体的には、幾何学

的な視点を以てコホロモジー等の概念を通して、証明を再検討し、現在の手法での困難を避ける方法を探す。

また、ノイズの大きさを極限操作により0にするという研究は、非線形の場合には全く先行結果がないため、まずは線形な調和振動子鎖について厳密な解析を行うことを目指す。

4. 研究成果

(1) 確率的なノイズ項をもつ一次元非調和振動子鎖に対する平衡揺動定理について、すでにある程度の結果を得ていたが、マクロスコピックな拡散係数にあたる量の評価など詳細な研究を加えて、論文としてまとめた(発表論文の)。

(2) 確率的なノイズ項をもつ一次元調和振動子鎖に対し、そのノイズの強さを極限操作により0に近づけていった場合、そのスピードに応じて、マクロなエネルギーの振る舞いが通常の拡散型になる場合と、異常拡散と呼ばれる特殊な拡散方程式に従う場合があることを明らかにした。これは、研究当初予想していなかった重要な結果である。特に、研究期間中、異常拡散のスケール極限による導出の手法が世界的に注目され大きく進展しており、その流れの中で本結果を得ることができた(発表論文の)。

(3) SEEM について、流体力学極限の証明の鍵となっている spectral gap の詳細な評価を得た。特に、先行研究では、物理的に自然なパラメータの範囲が除外されていたが、それを含むような形に拡張することができた。(発表論文の 及び)。これは、その前に行ったより一般的なモデルに対する証明(発表論文の)の手法が元となって、さらに SEEM の場合に適用するために新たなアイデアを幾つか用いることで可能となった。

(4) 非勾配型のモデル全般に対する新しいアプローチとして、幾何学的な視点を以ることで、様々なモデルに共通したスケール極限における重要な構造を見出すことができた。より詳細には、非勾配型の証明における最も重要かつ難しい定理である「閉形式の特徴付け」と呼ばれるものが、状態空間への群作用により現れるコホロモジーとして理解できることが明らかになった。このことを以て、spectral gap を用いない証明が可能になるモデルがあることや、状態空間をより一般化することなどスケール極限の問題に対する様々な新しい結果を得ることもできた(発表論文の)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

(雑誌論文)(計 6 件)

Y. Kametani, M. Sasada: “A new approach to the characterization of closed forms in the nongradient method” RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有 59 (2016), 1-13,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

M. Sasada; “Spectral gap for stochastic energy exchange model with nonuniformly positive rate function”. Ann. Probab. 査読有 43 (2015), no. 4, 1663-1711, DOI:10.1214/14-AOP916

C. Bernardin, P. Gonçalves, M. Jara, M. Sasada and M Simon: “From normal diffusion to superdiffusion of energy in the evanescent flip noise limit”, J. Stat. Phys. 査読有 159 (2015), no. 6, 1327-1368.

DOI: 10.1007/s10955-015-1235-8

M. Sasada: “Stochastic energy exchange models with degenerate rate functions. XVIIth International Congress on Mathematical Physics”, World Sci. Publ., 査読有 Hackensack, NJ, (2014), 344-350.

http://dx.doi.org/10.1142/9789814449243_0025

S. Olla, and M. Sasada: “Macroscopic energy diffusion for a chain of anharmonic oscillators”, Probab. Theory Related Fields 査読有 157 (2013), no. 3-4, 721-775.

DOI:10.1007/s00440-012-0469-5

M. Sasada: “On the spectral gap of the Kac walk and other binary collision processes on d -dimensional lattice. Symmetries, integrable

systems and representations”, Springer Proc. Math. Stat. 40 Springer, Heidelberg, 査読有 (2013), 543-560.

DOI:10.1007/978-1-4471-4863-0
〔学会発表〕(計 15 件)

佐々田槿子, Thermal conductivity for a harmonic chain in a magnetic field, Physical and mathematical approaches to interacting particle systems In honor of 70th birthday of Herbert Spohn, 東京工業大学(東京都目黒区), 2017年1月11日. □

佐々田槿子, Cohomological approach to the decomposition theorem for closed forms in the non-gradient method, Large Scale Stochastic Dynamics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach (GERMANY), 2016年11月19日.

佐々田槿子, On decomposition theorems for closed forms in the non-gradient method, 2016年度大規模相互作用系の確率解析, 東京大学数理科学研究科(東京都目黒区), 2016年11月4日.

佐々田槿子, 非勾配型の流体力学極限に現れる無権直積空間上の完全形式と閉形式, 2015年度確率論シンポジウム, 岡山大学(岡山県岡山市), 2015年12月17日.

佐々田槿子, A new technique for the computation of central limit theorem variances for exclusion processes and its application, RIMS International Project Research 2015 ” Stochastic

Analysis on Large Scale Inter-acting Systems”, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2015年10月26日.

佐々田槿子, Stochastic approach to the derivation of macroscopic energy diffusion in Hamiltonian systems, RIMS International Project Research 2015 ” Stochastic Analysis”, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2015年9月7日~11日.

佐々田槿子, Recent topics on hydrodynamic limits, New Trends in Stochastic Analysis, International Institute of Advanced Study, 国際高等研究所(京都府木津川市), 2015年7月6日~10日.

佐々田槿子, Energy diffusion for some stochastic particle systems with mechanical origin, 12th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 東京大学数理科学研究科(東京都目黒区), 2013年11月22日.

佐々田槿子, Spectral gap estimates for the Kac walk and other binary interaction processes on d-dimensional lattice, JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013 Discrete Mathematics and its Applications, 東京大学数理科学研究科(東京都目黒区), 2013年11月8日.

佐々田槿子, Macroscopic diffusion for some energy models with mechanical origin, Large Scale Stochastic Dynamics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,

Oberwolfach (GERMANY), 2013年10月27日.

佐々田槿子, Stochastic approach to a space-time scaling limit for Hamiltonian systems, Geometry and Dynamics 2013, 東京大学 数理科学研究科(東京都目黒区), 2013年9月16日

佐々田槿子, On the spectral gap of binary interaction processes having product reversible measures, Dirichlet Forms and Applications, German-Japanese Meeting on Stochastic Analysis, Mathematisches Institut der Universität Leipzig Leipzig (GERMANY), 2013年9月9日

佐々田槿子, On the spectral gap of binary interaction processes having product reversible measures, The 2nd workshop on Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics, 北海道大学 (北海道札幌市), 2013年8月9日

佐々田槿子, 流体力学極限による非平衡統計力学へのアプローチ, 第41回CRESTセミナー, 東北大学(宮城県仙台市), 2013年6月28日

佐々田槿子, Mixing rates and hydrodynamics for stochastic energy exchange models with degenerate rate functions, New Directions in Probability, Indian Statistical Institute, Bangalore Centre, Bangalore(India), 2013年6月3日

(4)研究協力者
Stefano Olla
Cedric Bernardin
Marielle Simon

6. 研究組織

(1)研究代表者

佐々田槿子 (SASADA Makiko)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：00609042