様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１１２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８００７１

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式に現れる界面運動と特異性の解析

研究課題名（英文）Analysis of interfacial phenomena and singularities in nonlinear partial differential equations

研究代表者
奈良　光紀（Nara, Mitsunori）

岩手大学・人文社会科学部・准教授

研究者番号：９０５１２１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では以下の研究を行った。
(1)特異極限問題を通じた、双安定型の非線形項を持つ消散型波動方程式における界面の形成と運動の解析を行い、それらに関わる評価式などの結果を得た。 (2)空間１次元の消散型波動方程式における進行波の安定性を考察し、初期値・初速度に関する十分条件を示した。 (3)拡散の非等方性を考慮した、非等方的Allen-Cahn方程式における広がり界面(spreading front)の形成と時間漸近挙動を解析し、Wulff図形という概念が重要な役割を示すことを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：This research mainly deals with the following topics; (1) singular limit problem of damped wave equations with bistable-type nonlinearity on the multi-dimensional whole space, where some estimates for generation and motion of interfaces are obtained, (2) stability of one-dimensional traveling wave solutions in the damped wave equations with bistable-type nonlinearity is analyzed, and some sufficient conditions for such the stability is shown, (3) asymptotic behavior of solutions with spreading fronts in the Cauchy problem of anisotropic Allen-Cahn equations is studied, where it is revealed that the notions of Frank diagram and Wulff shape play important roles.

研究分野：非線形解析

キーワード：偏微分方程式　反応拡散方程式　界面現象　進行波

１．研究開始当初の背景

反応拡散型偏微分方程式で記述されるある種の非線形現象においては、相異なる複数の物理的・化学的状態を分ける相境界としての「界面(interface)」が生じ、多様な空間的・時間的パターンを形成する。界面現象は、生物の形態形成・情報伝達においても大きな役割を果たしており、その理論的解明は生命現象などに代表される複雑な非線形現象を理解する上での重要な鍵となる。

研究代表者のこれまでの研究では、界面現象の理論的解明を目指し、反応拡散型偏微分方程式を中心とする種々の非線形偏微分方程式に現れる進行波(traveling wave)や定常解の安定性解析、$t\to\infty$での界面の時間漸近挙動の解析に取り組んできた。特に、研究開始当初までに得られていた結果は以下の通りである。

（１）平均曲率流方程式に関する結果

平均曲率流方程式は超曲面の発展方程式の代表例であり、反応拡散型偏微分方程式において、ある種のパラメータを 0 に近づけたときの特異極限(singular limit)として得られる。研究開始当初までの研究では、全空間に広がる曲線・(超)曲面の運動に焦点を当て、特に平均曲率流方程式の定常解・進行波解としての超平面の安定性と、$t\to\infty$での解の時間漸近挙動を解析した。また、曲率流方程式による平面曲線の運動について、直線型進行波およびV字型進行波の安定性に関する結果を示した。これらの成果は、下記（２）に示す反応拡散方程式の界面運動と深く関連するものである。

（２）Allen-Cahn 方程式に関する結果

Allen-Cahn 方程式は、双安定型の非線形項を持つ単独の反応拡散方程式である。この方程式において、2 つの安定定常状態を隔てる界面が超平面的な形状をしている状況を表現する解が、平面波(planar wave)である。研究代表者の研究開始当初までの研究では、Allen-Cahn 方程式に現れる平面波の安定性を解析し、空間無限遠方で減衰する初期擾乱に対する漸近安定性に関して、従来得られていた結果を拡張した。また、遠方で減衰するとは限らない初期擾乱に対する平面波の漸近安定性と解の時間漸近挙動を考察した。更に、平均曲率流方程式を用いた界面運動の近似定理を与え、これを応用してそれまでの結果を拡張した。

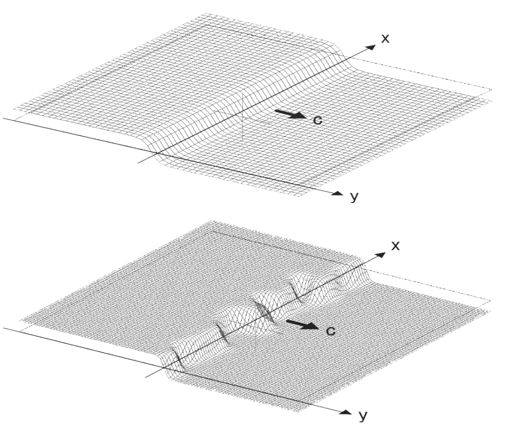

図１：反応拡散方程式に現れるR^2上の平面波(上)と摂動された平面波(下)

２．研究の目的

本研究の目的は、上記（１),（２）に示した結果を更に発展させ、種々の非線型方程式に現れる界面現象の理論的解明を進めることである。申請時における具体的な主要テーマは以下の２つである。

（１）非線型方程式における界面現象に関わる特異極限問題の解析

Allen-Cahn 方程式および消散型波動方程式(damped wave equation)に対する特異極限問題を通じて、界面現象の理論的解明に取り組む。特に、特異極限における界面運動と平均曲率流方程式の関係をより詳細に明らかにすることを目的とした。Allen-Cahn 方程式については、特異極限問題も含め、以前から広く研究されている。研究開始当初までに得られていた結果・解析手法を応用し、従前の理論的結果をより精密な方向へ改善することを具体的な目標とした。また、消散型波動方程式は、いくつかの点において、放物型方程式と類似した性質を持つことが知られている。そのため、双安定型の非線形項を持つ消散型波動方程式では、Allen-Cahn 方程式と同様の界面運動が生じることが予想される。この点を理論的に考察し、また

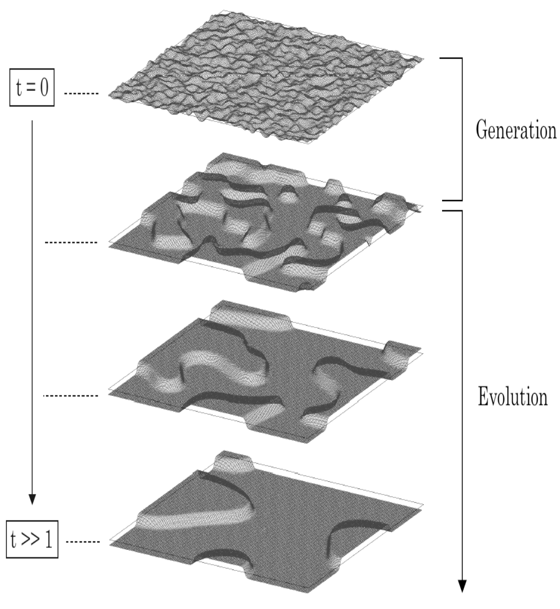

図２：R^2上のAllen-Cahn方程式における界面の形成と時間発展の数値計算

進行波の安定性など関連した諸問題の解明に取り組むことをもう一つの主要な目的とした。

（２）平均曲率流方程式および非線形方程式における定数定常解の安定性の解析

初期値が空間無限遠方で減衰するとは限らないという条件下で、非線形偏微分方程式の解の時間漸近挙動を解析することは通常は困難である。研究代表者が以前に発表した論文（JDE2007, SIAM2008）では、そのような仮定の下でシャープな評価を導いた。同様の結果、すなわちｔ→∞での解の時間漸近挙動が線形熱方程式と一致するという結果が、平均曲率流方程式において、より弱い仮定の下で成り立つのかを考察する。また一般に、定数定常解を持つ他の非線形放物型方程式についても考察する。

３．研究の方法

研究遂行の具体的な手法は、非線形偏微分方程式に関する種々の解析的手法を基にした理論的研究、および数値計算によるシミュレーションである。数値計算は、Ｃ言語および MATLAB を利用した。また、研究活動においては、減衰型波動方程式の特異極限問題について、パリ南大学の D. Hilhorst 氏と共同研究を行った。これに関連して、2014 年 9 月にフランスに渡航し、パリ南大学にて研究討議を行った。また、非等方的 Allen-Cahn 方程式の研究においては、東京大学の俣野博氏、ミネソタ大学の森洋一郎氏と共同研究を行った。東京大学において、年数回程度の頻度で研究討議を行った。

４．研究成果

（１）消散型波動方程式の特異極限問題

多次元全空間における、双安定型の非線形項を持つ消散型波動方程式の特異極限問題について、反応拡散型方程式（特に、Allen-Cahn 方程式）と同様の界面現象が起きることを示し、この結果をまとめて、SIAM Journal on Mathematical Analysis 誌に発表した。また、海外国際会議および国内の研究集会において、この結果を発表した。この研究成果は、パリ南大学の D. Hilhorst 氏との共同研究で得られたものである。

具体的な内容としては、方程式に含まれる減衰（あるいは消散）の強さを制御するパラメータをある程度大きくした場合に、放物型方程式の場合と似通ったある種の解の比較定理が成り立つことを示し、これを用いて放物型方程式の解析手法を応用した。界面の形成に係る時間の評価や、特異極限における界面の運動方程式の導出など、概ね、当初の予想通りの結果を得ることが出来た。消散型波動方程式の界面運動については、従前から知られている結果は少ない。今回の成果は、その点で一定の新規性がある。一方で、細かな評価の改善、対象となる方程式の一般化など、今後取り組むべき多少の課題も残されている。また、比較定理を利用する手法だけでは、放物型方程式とは異なる、消散型波動方程式固有の性質を明らかにするには、やや限界があるとも言える。

（２）消散型波動方程式における進行波

上記（１）の特異極限問題と関連して、空間１次元における、双安定型の非線形項を持つ消散型波動方程式について、その進行波の安定性を考察した。この方程式には、Allen-Cahn 方程式と本質的に同じ１次元進行波が存在する。ｔ→∞としたとき、解がこの１次元進行波に収束する為に、初期値・初期速度が満たすべき十分条件を示した。証明の手法は、上記（１）の特異極限問題の場合と同様に、減衰をコントロールするパラメータがある程度大きい場合に、放物型方程式と同様のある種の解の比較定理が成り立つことを示すこと、解の挙動を把握するための適切な優解・劣解 (super-solution, sub-solution)を構成することによる。研究結果は、学術誌に投稿中した。収束レートが示されていないこと、方程式に係る仮定がやや強いことなどが、今後解決すべき課題である。

（３）非等方的(anisotropic)な Allen-Cahn 方程式における界面運動の解析

当初の研究計画では、従来から広く研究されている(等方的な)Allen-Cahn 方程式における界面運動、特に特異極限問題に取り組み、より詳細な結果を示すことを目指す予定であった。しかし、近年の研究で、拡散の効果が方向ごとに異なる非等方的 Allen-Cahn 方

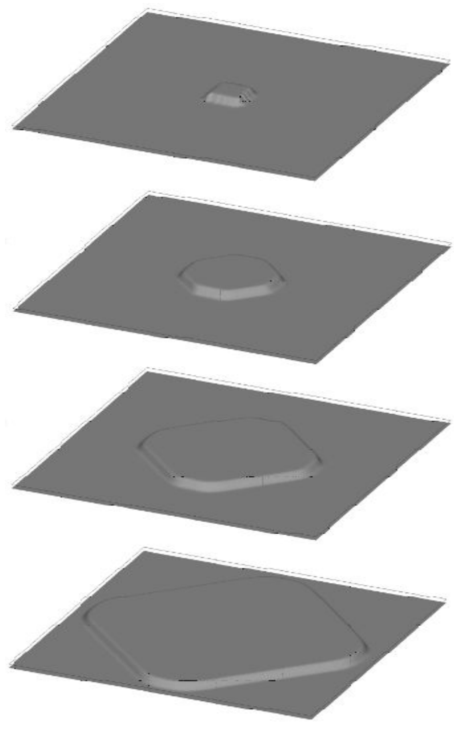

図３：非等方的なAllen-Cahn方程式におけるSpreading frontの数値計算

程式が注目されつつあり、その一方で、この問題はいまだ解明されていない部分が多いことから、研究期間後半に、この方程式における界面運動の解析に取り組んだ。

　まず、準備的な考察として、等方的な場合と非等方的な場合を比較した際の、方程式の基礎的な性質の違いや、解析に不可欠となる概念の把握に努め、また、弱解の定義や比較定理・強最大値原理などの性質について調査を進めた。その後の具体的な研究活動としては、空間多次元の Cauchy 問題おいて、空間的に遠方へと拡大してゆく界面(spreading front)の挙動に焦点を当て、その形成と安定性を解析した。等方的(isotropic)な方程式では、拡散の効果が空間の方向毎に同じであるため、球対称な spreading front が存在することが知られており、その安定性も古くから研究されている。一方、本研究では、非等方的な方程式について、spreading front の形状が、Wulff 図形に漸近することを明らかにした。優解・劣解を構成する手法に基づき、その証明を与えた。この問題においては、非等方的平均曲率流方程式や、非等方的法線ベクトルなどの概念が重要な役割を果たすことが分かった。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

① D. Hilhorst, M. Nara, ``Singular limit of a damped wave equation with a bistable nonlinearity'', SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol.46 (2014), 1701-1730, 査読有

６．研究組織

(1)研究代表者

奈良光紀（NARA, Mitsunori）
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号：９０５１２１６１