様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２９ 日現在

機関番号：５３７０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2014

課題番号：２５８２０２７５

研究課題名（和文）一般逆行列の面的折り構造への適用に関する研究

研究課題名（英文）Application of generalized inverse matrix to the analysis of foldable faceted structures

研究代表者

渡邉　尚彦（WATANABE, Naohiko）

岐阜工業高等専門学校・その他部局等・助教

研究者番号：５０５５００３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，不安定リンク構造の解析手法として妥当性の確認されている一般逆行列による計算手法をパネルとヒンジから構成される剛体折紙モデルに適用し，特異状態における剛体折紙モデルの特徴の調査，また剛体折紙の拘束条件の構造解析への適用を行った.
構造解析への応用に関しては，角型鋼管柱の圧縮強度計算を対象として剛体折り条件の降伏線解析への適用例を示した．次に剛体折紙モデルの特異状態解析として高次項を考慮した拘束条件式を導出し，幾つかの折線例からその妥当性を検証した.

研究成果の概要（英文）：In this study, through the application of the analysis using a generalized inverse matrix, whose validity has been confirmed for unstable linkage models, to a rigid origami model that is composed of panels and hinges, we investigated the characteristics of a rigid origami model at a singular state, and showed an example of the application of rigid-foldability condition to structural analysis.
At first, for the compressive strength calculation for a square pipe as an example, we presented a way of applying rigid-foldability condition to yield line analysis. Next, for a singular state of a rigid origami model, we formulated the constraint condition in consideration of high order term and validated with some crease patterns.

研究分野：構造工学

キーワード：剛体折紙　一般逆行列　制約条件付最適化　特異点　有限剛体変位　降伏線　不安定トラス

１．研究開始当初の背景

剛体折紙は折紙を折り線を稜線とする多面体として近似しすべての変形が折り線における回転に起因して起きていると仮定する，すなわち面が剛なパネルとヒンジとで構成されるとする幾何学モデルである．不安定リンク構造の変形解析手法として有効性が示されていた一般逆行列による解析手法の面的構造への適用を申請者らが 2009 年に提案して以来，情報数理関係や工学への応用，折りのデザインといった幅広い観点から剛体折紙は関心が持たれるテーマとなった．

他方，折畳み構造の工学的応用に関して、衝撃時にエネルギーを効果的に吸収可能な筒型折れ構造部材や折り加工された面材の組合せで構成されるコア材等を対象にＦＥ解析が実施され，折紙構造由来の特徴としてその構造性能が検討される例が多くなった．しかし，剛体折紙は幾何モデルとしての扱いが主で構造性能評価として扱われることがなく，また FE 解析対象となる折り構造に剛体折紙理論から得られている知見が生かされることはなく，剛体折紙条件と構造工学との間を関係づけた研究は見られなかった．

２．研究の目的

折紙構造においてはヒンジ線回転が全体変形の由来となる点に着目し，構造工学分野で耐荷力評価に用いられてきた降伏線解法へ剛体折り条件の適用を試みた．これは仮定する塑性ヒンジ線の二面角と面内位置の関係に剛体折り拘束条件を適用し，ここから求まる二面角変化を内部仕事量算出に使用するというアイデアである．

一方，剛体折紙の一般逆行列を使用した可折モード抽出解析適用において初期平坦状態は特異状態であり，展開途上時において適用可能であった条件がそのままでは不十分であることが既存の研究で明らかになっており，この特異状態における特徴をトラスモデルでの特異状態解析手法を適用して明らかにすることとした．

３．研究の方法

次の２方面から研究を行う．

（１）降伏線解法への剛体折紙条件の適用

角型鋼管の圧縮耐荷力推定問題を例として，降伏線解法に剛体折紙の拘束条件を適用し，ヒンジ回転による内部仕事量増分のより合理的な算定手法を提案する．また実験結果と計算から得られた崩壊曲線を比較することで有効性を検討する．

（２）高次項を導入した剛体折紙モデルの特異状態の解析

不安定リンクモデルの解析手法を参考にしながら剛体折紙モデルの特異状態の解析法を提案する．

①まず，拘束条件の立式として既存の回転行列に代わって四元数を使用したアプローチを考える．②次に不安定リンクモデルの畳込み経路解析について制約条件付き最適化問題として扱いうることが示されていることを参考にし，平面角を制約条件，二面角最小化を目的関数とする最適化問題としての剛体折紙の畳込み経路解析の可能性を検討し，最適化過程における特異性の観点から考察する．③最後に特異状態の不安定リンクモデルに有効性が確認されている拘束条件の２階導関数まで考慮した定式化を剛体折紙モデルの拘束条件に適用し，特異状態である平面展開図状態から剛体可折な二面角モードの抽出可能性を検証する．

４．研究成果

下記(1)を通して剛体折紙に関して得られている幾何学的拘束条件の構造工学問題への適用を試み，(2)を通じて高次項を考慮した一般逆行列による不安定構造の変形解析手法を剛体折紙モデルに適用した定式化を行い，その特異状態である平坦時についての性質を明確化した．

(1)降伏線解法への剛体折紙条件の適用

従来用いられている降伏線解法において鋼板部材の終局耐力を求めるために崩壊時の降伏線の形状を仮定し，塑性ヒンジ線における内部仕事量と外力による外部仕事とを等置することで崩壊曲線を得，崩壊荷重を求めるといった手法が適用されている．このヒンジ周辺での回転が全体の変形に大きく寄与している点は折紙的であるとみなすことができるが，剛体折紙に関する拘束条件を降伏線解法に適用した事例はこれまでなかった．そこで角型鋼管の圧縮耐荷力解析算出を例に導入される塑性ヒンジ線また回転角計算にあたって剛体折紙モデルで得られている幾何学的拘束条件の適用を試みた．以下に適用した算出手順を示す．崩壊曲線算出には小野ら(1997)の方法を参照した．

(Step1)軸変位からヒンジ回転角の算出

図のようなヒンジ線を仮定し，軸方向変位δを与えた場合の角ヒンジ線の回転角を剛体折り条件により算出する．ここで使用する頂点周りの拘束条件は$\sum \dot{\rho_n}\boldsymbol{n}_i = \mathbf{0}$（$\dot{\rho_n}$：折線における二面角回転速度，$\boldsymbol{n}_i$：折線方向ベクトル）である．

(Step2)塑性ヒンジにおける回転角から内力仕事の算出

ヒンジ線で角ρ回転したときの圧縮側と引張側のひずみが求まり，また鋼材の引張試験より得られた応力歪曲線から，各ひずみ値に対し応力が決定できる．

塑性ヒンジでの内力仕事は各ひずみエネルギーを引張領域と圧縮領域に渡って積分することで計算される．対数ひずみがε_nからε_{n+1}へ変化したときの塑性ヒンジでの内力仕事増分 dW_Hは以下のように表される．

$$\mathrm{d}W_H = V_H^+ \int_{\varepsilon_n^+}^{\varepsilon_{n+1}^+} {}_a\sigma\left({}_a\varepsilon_H\right) d\varepsilon + V_H^- \int_{\varepsilon_n^-}^{\varepsilon_{n+1}^-} {}_a\sigma\left({}_a\varepsilon_H\right) d\varepsilon$$

ここでV_H^+/V_H^-は曲げ圧縮/引張による塑性化領域の体積を表す.

(Step3)崩壊曲線の導出

軸方向変位δを与えた場合の外力仕事量と内部仕事量の釣合いを考慮することにより崩壊曲線を得る.

Fig.2 は文献に示されている鋼管の圧縮試験データと剛体折紙条件を考慮して算出した崩壊曲線を比較した一例である．ピーク荷重を精度よく予測できているが，ピーク後の曲線は追跡されていない事，仮定した種々のパラメータが実験結果と異なる点，また実際の角型鋼管の幾何学的条件を満足させるために移動ヒンジを仮定する必要があること等，剛体折りの拘束条件を降伏線解法へ適用することによる利点が発揮されるためには解決されなければならない問題点も多く，これらは今後の課題とした．以上は[2][4]で発表を行った.

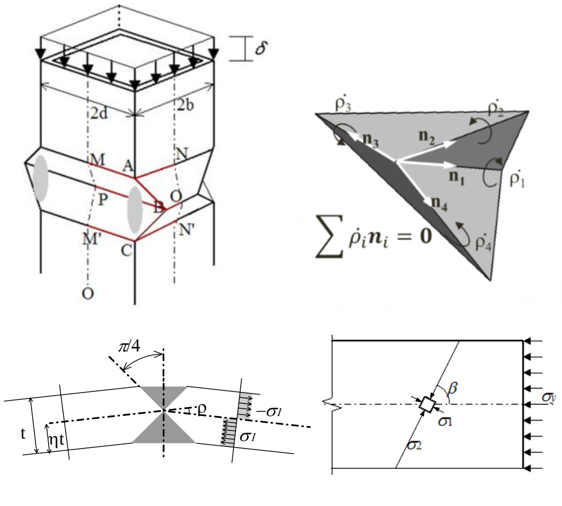

Fig.1 降伏線解法に適用した仮定

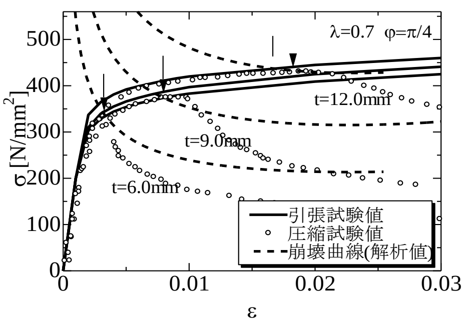

Fig.2 計算結果と実験値の比較

Fig.3 座屈形状の例

（２）高次項を導入した剛体折紙モデルの特異状態の解析

パネルとヒンジとで構成される剛体折紙モデルに対して，不伸長トラスモデルを扱うのに有効性が示されている一般逆行列を使用した解析手法を適用することにより，つまり拘束条件を不伸長条件に代えて頂点周りの角度条件を採用し，変形時の変数として節点座標（トラスモデル）に代わって二面角を採用する(回転角モデル）という拡張により，展開中の次ステップ変形モード推定を行えることが既に示されているが，初期平坦状態は拘束条件式本数が縮重する特異な状態に相当し，展開途中時と異なり変形モードを抽出するために特別な工夫が必要となる．本研究では，特に特異状態における扱いを明確化するため以下の数理的基礎研究を行った.

①拘束条件式の考慮にあたって回転行列に代えて４元数の導入

剛体折紙モデルの頂点周りの角度条件は Kawasaki, Belcastro らによって回転行列の式として与えられており，この拘束条件式の時間微分により剛体折紙の変形モード解析の有効性が示されているが，行列に代えて四元数表現による角度の拘束条件の扱いを試みた．頂点周りの回転条件のクオータニオン表記の時間微分操作により，頂点周りの$\dot{\rho}\boldsymbol{n}$のベクトル和が$\mathbf{0}$であるとする（ρ̇;二面角変化速度，n；折線ベクトル)，回転行列を使用して導出された結論と同様の結果が導出され，この成果は[1]にて発表したが，特異状態の解析に関しては回転行列を使用した場合と同様の課題が残った.

②制約条件付き最適化問題としての剛体折紙の変形経路解析

不安定トラスモデルに対して有効な変形経路解析手法として示されている，制約条件付き最適化問題としての扱いを剛体折紙モデルに対して適用し，制約条件を各頂点周りの平面角の和，目的関数を二面角の和の最小化として，初期不整の与えられた展開図情報から折畳み解析が可能なことを示した．ここで制約条件$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$のもと，目的関数 $S = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の最小化する手法として$\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{B}'\dot{\boldsymbol{x}}$を一般逆行列により逐次解く方法を採用した．また，解析終了判定として不安定トラスモデルで採用されていた「解の存在条件」($[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}'^{+}]\Delta\boldsymbol{S}$)，「射影勾配」($[\mathrm{I}\text{-}\mathrm{J}^{+}\mathrm{J}]\nabla \mathrm{S}$, $\boldsymbol{J} = [\nabla g_1, \nabla g_1, \cdots \nabla g_m]^T$)の挙

動は剛体折紙の畳込み終了判定においても有効であり，特に「射影勾配」指標は畳込み終了時とともに初期平坦時も０であり，初期平坦時の特異性を示すものであることを明らかにした．この成果は[3][5]で発表した．

③特異状態における変形モード抽出

拘束条件の２階微分までを考慮した条件を定式化し，これにより特異状態で可能な変形モードが抽出できることを示した．

トラスモデルを対象とした既存の研究では，特異状態において２次項を考慮することで妥当な有限剛体変位モードを抽出できること，つまり拘束条件式$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots)=\boldsymbol{0}$の微分式(1)(2)の(2)についても考慮することで，式(1)のみでは抽出できなかった妥当な剛体変位モードを抽出できることが示されている．

$$\boldsymbol{A}'\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}'\ddot{\boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}''\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

本研究ではこれを剛体折紙に関する頂点周りの回転行列の拘束条件式に適用し，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{I}$に対して

$$\boldsymbol{R}'\dot{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'^{+}\right]\left[-\dot{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{R}''\dot{\boldsymbol{\rho}}\ \right]=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

を確認することで特異状態において可能な変形モードを抽出できることを示した．

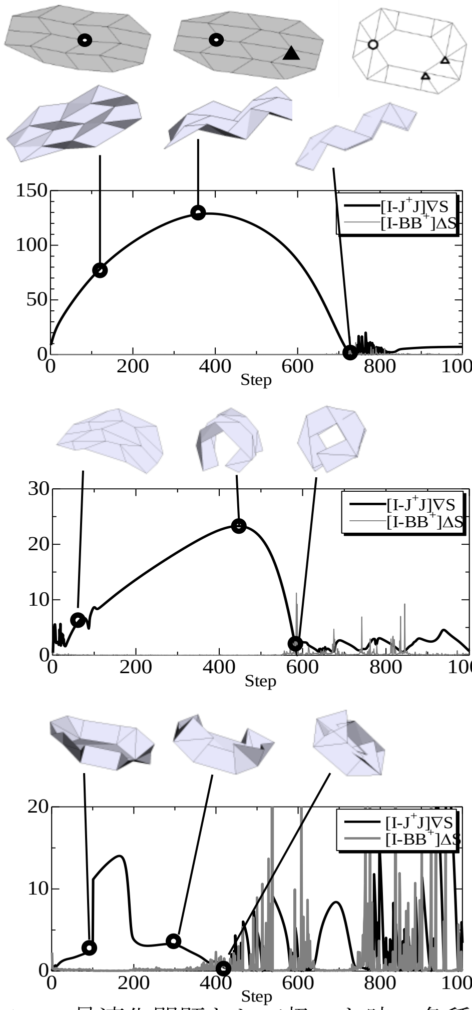

Fig.4 最適化問題として扱った時の各種指標の変化

また，過去に提示した剛体可折モード抽出法の導出を整理し，これは平坦状態からの微小二面角変化を起こすとしたときに現れる一次微小項まで考慮したものに相当し，この図解法である「順次接合されたベクトル線図が向き付けされた面積０の図を描く」という条件が特定の項を抽出した必要条件に相当するとする位置づけを明確化した．

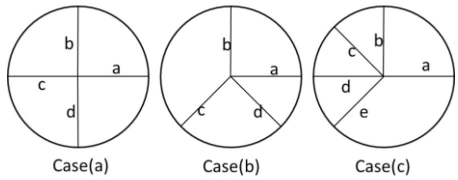

Fig.5　剛体可折性判定対象とした展開図例

Table 1 高次項を考慮して抽出された剛体可折モード

	a	b	c	d	e
case(a)	×	×	×	×	
case(b)	1.207	0.5	1.207	-0.5	
	0.5	-1.207	-0.5	-1.207	
	-0.5	1.207	0.5	1.207	
	-1.207	-0.5	-1.207	0.5	
case(c)	0.666	0.482	0.783	-0.923	1.464
	0.77	1.229	-1.023	0.986	0.716
	0.491	1.147	-0.3	-0.231	1.322
	1.455	-0.534	1.032	0.53	0.277
	0.969	-0.272	1.289	-0.582	0.905
	-0.969	0.272	-1.289	0.582	-0.905
	-1.455	0.534	-1.032	-0.53	-0.277
	-0.491	-1.147	0.3	0.231	-1.322
	-0.77	-1.229	1.023	-0.986	-0.716
	-0.666	-0.482	-0.783	0.923	-1.464

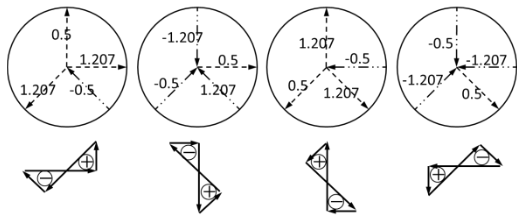

Fig.6　Case(b)で抽出された剛体可折モード

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

[1]Naohiko WATANABE, Masafumi TANAKA, “Singular State of Rigid Origami Model”,Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, 査読有（掲載確定）

〔学会発表〕（計　６件）

[1]渡邉尚彦「剛体折紙の畳込み経路における特異状態」,第 78 回形の科学シンポジウム, 2014/11/23, 佐賀

[2]渡邉尚彦・河合郁弥「制約条件付き最適化問題としての畳込み経路解析」, 日本応用数理学会 2014 年次講演会（日本応用数理学会）, 2014/9/5, 東京
[3]Watanabe Naohiko "Application of Rigid-Foldability Condition to Yield Line Analysis",The 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education, 2014/8/13,Tokyo
[4]渡邉尚彦「制約条件付最適化問題としての畳込み経路追跡」第 16 回折り紙の科学・数学・教育研究集会（日本折紙学会）, 2014/06/22, 東京
[5]渡邉尚彦「剛体可折条件の降伏線解法への適用」, 第 15 回折り紙の科学・数学・教育研究集会（日本折紙学会）, 2013/12/14, 東京
[6]渡邉尚彦「四元数による剛体折り表現」, 第 14 回折り紙の科学・数学・教育研究集会（日本折紙学会）, 2013/6/22, 東京

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
渡邉　尚彦（WATANABE Naohiko）
岐阜工業高等専門学校・環境都市工学科・助教
研究者番号：50550034

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：