

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25870004

研究課題名(和文) 流体方程式に対する実解析的手法および数値計算

研究課題名(英文) Real analysis and numerical computation to the fluid equations

研究代表者

米田 剛 (Yoneda, Tsuyoshi)

東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：30619086

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：流体運動の基礎方程式である非圧縮Navier-Stokes方程式および非圧縮Euler方程式を使って、流体粒子の局所的振る舞いの解析や数値計算を行った。

具体的には、双曲型流れや旋回流、滑りなしの境界近くの流体粒子の振る舞いに着目し、それらが流体運動そのものに対してどのような効果を及ぼすかを調べた。特に、時間発展におけるNavier-Stokes流の最大値の増減とその位置の変化、滑りなし境界上のNavier-Stokes流の剥離現象、Euler流における領域形状と双曲型流れの関係を調べた。

研究成果の概要(英文)：We used incompressible Navier-Stokes and incompressible Euler equations to analyze local behavior of the particle trajectory on these flows. Also we implemented the numerical computation. More precisely, we focused on the hyperbolic flow configuration, swirl and no-slip boundary, and see how these behavior affect the flow behavior themselves. In particular, we studied time evolution of the maximum value and its position of the Navier-Stokes flow, separation phenomena of the Navier-Stokes flow with the no-slip boundary, and the relation between boundary shape and the hyperbolic flow configuration of the Euler flow.

研究分野：数理流体力学

キーワード：Navier-Stokes方程式 Euler方程式 Green関数 剥離現象

1. 研究開始当初の背景: 我が国においては、東日本大震災後に風力発電開発の重要性を再認識している状況であり、今後のその開発拡大のためには、風力発電の効率を全般的に上げる必要がある。その為には「流体力学の基礎研究の本質的な進展が」が重要である。滑りなしの境界(ディリクレ境界)近くの粘性流体の振る舞いの解析に関しては、「Prandtlの境界層理論」が挙げられる。その理論ではNavier-Stokes方程式に対して境界層方程式という近似方程式誘導し、それを(数値解析を援用しながら)解析する。しかし、Navier-Stokes方程式そのものを使って境界層剥離などの流体现象を純粋数学的に追求した研究結果はほとんど存在しない。
2. 研究の目的: 今までのNavier-Stokes方程式研究では、「関数空間やそれに関連するノルム不等式」、或いは「フーリエ変換やフーリエ級数展開」が主な解析道具であった。しかしそれでは「ある点の近くでの流体の振る舞い」などといった局所解析がほぼ不可能である。それは圧力項を従来の特異積分作用素論などを使って処理しているからであり、圧力項から何かしらの局所情報を取り出そうとしていないところに起因しているのだらうと私は感じている。そこで私は今まであまり誰も着目してこなかった「流線や流跡線や旋回、及び圧力の等高線(等高面)の集中度合いや曲率などの幾何学的性質」といった幾何学的概念を使って流体の局所情報を引き出し、それによって「流体運動の局所的性質」を数学的に明らかにすることを目的とした。
3. 研究の方法: そのような「流体運動の局所的な性質」を洞察する際に、私は主に3つの方法をとった。
  - (1) 微分幾何学に詳しいNational Chiao Tung UniversityのChi hin Chan氏とBinghamton UniversityのMagdalena Czubak氏の研究協力を得ながら、境界層剥離を追求するという方法を取った。彼らは海外在住だが、機会を見つけてはお互いに直接会って議論を進捗させるという方法を取った。境界層理論においては、滑りなしの境界付近の境界層から渦が生成されることが知られている。一般的には、その渦の生成の前に境界から「剥離」という現象が起きており、その剥離が起きる直前における境界付近の粒子の流れは、その層流の方向と逆向きとなる流れが起きる。私は、その逆流が起きる手がかかり、すなわち「初期時刻における粒子の加速度が層流方向と逆方向である」ことを純粋数学的に見い出すことが出来ると予想し、微分幾何学概念を用いるという方法を取った。
  - (2) ポテンシャル論に詳しい東京工業大

学の伊藤翼氏と三浦英之氏の研究協力を得ながら、領域形状とEuler流の振る舞いの関係を調べるために、その領域形状に大きく依存するグリーン関数を詳しく解析する、という方法を取った。勿論ではあるが、グリーン関数の性質を調べる研究分野は「ポテンシャル論」と呼ばれている。三浦氏はNavier-Stokes方程式やEuler方程式の数学解析分野に詳しい。それぞれのエキスパートが定期的に一同に集まって、その時にbrainstormingを行いながら研究を進捗させる、という方法を取った。

(3) 今までの(1)と(2)はどちらも純粋数学的な洞察が中心であり、従って、それらは一同に集まってbrainstormingさせることがもっとも効果的な方法となっていた。この三番目の方法は、そのような純粋数学ではなく、数値計算を使った方法である。そこで、有限要素法によるNavier-Stokes方程式の大規模数値計算に詳しい(当時)早稲田大学の野津裕史氏と東京大学の許本源氏の研究協力を交え、スパコンを使ったNavier-Stokes流の数値計算を進める方法をとった。その際、この数値計算プロジェクトにおいてはGiga-Hsu-Maekawa(2014)の純粋数学的結果を有効に使いたかったので、この著者の一人である許(Hsu)氏もこのプロジェクトに加わって頂くという方法を取った。

#### 4. 研究成果

- (1) Kiselev-Sverakは2014年に「領域が円の場合における2次元Euler流において、渦度の一階微分が時間発展によって二重指数増大する双曲型流れが存在する」ことを示した。彼らは境界上でよどみ点をもつ双曲型の流れを使ってそのような驚くべき定理を導いた。そこで伊藤氏、三浦氏とで、領域に角がある場合でも、そのような双曲型流れが果たして同様な増大度を持ちうるかどうかを追求した。角によどみ点を持つ双曲型の流れにおいては、渦度の一階微分が(よどみ点において)高々一次増大しかないことを示すことが出来た。それに関する論文は既にJ. Math. Fluid Mech.に採録決定済みである。
- (2) No-slip境界近くの軸対称Navier-Stokes方程式の振る舞いに関する大規模数値計算の研究を、野津氏と許氏とで進捗させたその論文はJ. Fluid Mech.に既出版されている。双曲型流れ(background flow)と旋回の効果(secondary flow)とno-slip境界の効果が重なることにより、その速度場の絶対値が増大し、更にその渦度方向が激しく変化する現象が起きることを明らかにした。

これは、数学論文の Giga-Hsu (許) -Maekawa(2014 Comm. PDE)における、平らな no-slip 境界条件を課した Navier-Stokes 流における渦度方向の blowup criteria と密接に関連している。

- (3) 粘性流体の境界付近における局所的振る舞いを数学的に明らかにするために、Chan 氏と Czubak 氏と私とで、剥離現象が起きる為の必要十分条件を表している ODE を発見し、そこから剥離が起きるための流体の幾何学的振る舞いを追求した。この研究は既に Physica D に出版済みである。剥離現象を純粹数学的に研究した論文としては、Ma と Wang の論文 (Discrete and continuous dynamical systems) が有名であるが、その彼らの研究結果をより洗練化してとも言える。我々の論文では、ユークリッド空間上の流体運動だけでなく、球面上や双曲空間上の流体運動に対する剥離条件も見出した。この場合は微分形式やリーマン計量という幾何学的概念を本質的に用いている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

(1) T. Itoh, H. Miura and T. Yoneda, Remark on single exponential bound of the vorticity gradient for the two-dimensional Euler flow around a corner, to appear in J. Math. Fluid Mech. (査読有)

(2) P-Y. Hsu, H. Notsu, T. Yoneda, A local analysis of the axi-symmetric Navier-Stokes flow near a saddle point and no-slip flat boundary, J. Fluid Mech., 794 (2016) 444-459. (査読有)

(3) C-H. Chan, M. Czubak and T. Yoneda, An ODE for boundary layer separation on a sphere and a hyperbolic space, Physica D, 282 (2014) 34--38. (査読有)

[学会発表](計 8 件)

(1) T. Yoneda, A local analysis of incompressible Euler flow, Fifth China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Wuhan, China, Nov. 20 2015.

(2) T. Yoneda, A differential geometric consideration on the Navier-Stokes flow and its numerical computation, Mathematical Theory of Turbulence via

Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, Hotel Nikko Nara, Japan, March 4 2014

(3) T. Yoneda, Topological Instability of Laminar Flows for the Two-dimensional Navier-Stokes Equation with Circular Arc No-slip Boundary Conditions, Fourth Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Tokyo tech Univ., Sep. 19 2013

(4) T. Yoneda, Topological Instability of Laminar Flows for the Two-dimensional Navier-Stokes Equation with Circular Arc No-slip Boundary Conditions, RIMS 研究集会 (調和解析と偏微分方程式) 京都大学数理解析研究所, July. 10 2013.

(5) T. Yoneda, Topological Instability of Laminar Flows for the Two-dimensional Navier-Stokes Equation with Circular Arc No-slip Boundary Conditions, PRIMA Congress Shanghai, China, June 24 2013.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等: 特になし

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
米田 剛 (YONEDA TSUYOSHI)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 30619086

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：