様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２４ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８７０００５

研究課題名（和文）密度勾配依存応力を持つ非線形連続体の運動に対する数学解析的・数値解析的研究

研究課題名（英文）A study Research of mathematical analysis and numerical analytical a non-linear continuum with density gradient-dependent stress

研究代表者
中野　直人（Nakano, Naoto）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・研究院研究員

研究者番号：３０６１２６４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，構成則において物体の歪みだけでなく物体の密度勾配にも依存する応力テンソルを持つ連続体モデルの数学解析と数値解析をおこなった．このモデルは密度函数と速度場ベクトルを未知函数にもつ非線型偏微分方程式系によって与えられ，その主要項に密度函数に関する退化非線型項を含んでおり一般的な解析は困難であった．そのため，本モデル方程式に特有な性質を持つ特解であるサイクロイド解の性質を数学解析的，かつ数値解析的におこなうことで本モデルの示す流れの挙動の理解の深化につなげることを目的とした．ここでは，正則化空間一次元問題の適切性の証明や数値解析的手法による特異的な解の解像が可能となった．

研究成果の概要（英文）：This research project studied mathematical analysis and numerical analysis for a continuum model with density gradient-dependent stress. This model is represented by a system of partial differential equations for the density function and the velocity vector field of the continuum. Since the principal terms include degenerate non-linear terms with respect to the density, it is difficult to prove the well-posedness of, for example, an initial-boundary value problem for this model in general. We focused on a characteristic steady solution specific to this model, which is so called cycloid solution, to deepen understandings of characteristic properties of a continuum behaviour described by this model. Here, by performing mathematical and numerical analysis, we obtained some well-posedness results and resolved singular profiles of the solutions.

研究分野：非線形解析

キーワード：偏微分方程式　常微分方程式　単純剪断流　特異定常解　数値解析　連続体モデル

## １．研究開始当初の背景

砂や粉等のいわゆる粉粒体の流れや交通流などのマクロな多体粒子系の挙動に着目すると，こうした流れには流動層と静止層がはっきり分かれたり，粒子がクラスタリングを起こしたりと通常の流体とは異なる様相が観察されることがある．これは密度が局在するなどの粒子系特有の現象に関連する性質であり，既存の流体モデルでは表現できないことが多く，新しいモデル化が必要とされていた．その様な粒子系のモデルを考えるとき，その流れは粒子組成が一様でない上に粒子間隙の存在も無視できないため，不均一連続体モデルを考慮する必要がある．一般に連続体モデルにおいて，粒子スケールが目に見えるほど大きい粒状物体の運動を捉えるのは難しいが，砂等の流動性に着目して，考察の対象となる運動の代表スケールによっては連続体モデルが適用可能である．連続体の運動は，質量・運動量・角運動量・エネルギーの各保存則に加え，物性を表現する応力の構成則に支配される．我々の考える不均一連続体モデルでは，粒子間隙の影響を考慮し，構成則において物体の歪みだけでなく物体の密度勾配にも依存する応力テンソルを採用した．

本研究で採用した構成関係式における上記密度勾配依存応力では，Goodman-Cowin (1971)に始まり，Rajagopal-Massoudi (1990), Málek-Rajagopal (2006) など主に工学の分野で採用されており，広くその有用性が認められている．その一方で，この密度勾配依存応力モデルに関する数学解析の結果は少なかった．モデル方程式は非線形偏微分方程式系になるが，密度函数に関する退化型非線形主要項の存在から解析が困難となっているのがその理由である．これに対して，本研究代表者は本研究開始以前からその方程式系に対する数学的解析を試み，問題を非圧縮条件下に限定して時間局所解の一意存在性について研究した．しかし，この様な不均一モデルにおける運動では，本来粒子間隙の影響から圧縮性の連続体として解析する方がより自然であった．非圧縮条件下では与えられた問題 Lagrange 座標系で書き直すのが有効であったが，それは本質的に非圧縮条件下でしか有効でないため，圧縮性モデルの解析に対しては新しい解析手法の構築が必要となっていた．これに対して，本研究代表者は圧縮性の密度勾配依存モデルに対する数学解析として，モデル特有の特徴を抜き出すために定常単純剪断流に状況を限定して解析を行い，それまでに以下の様な結果を得ていた：

(1) 定常単純剪断流における幾つかの種類の定常解の存在性とある種の一意性の証明
(2) Poiseuille 流と Couette 流に対する特解（密度一定解とサイクロイド解）の導出
(3) 単純一次元問題に対するサイクロイド解の存在性

(1),(2)共にモデル方程式は退化非線形常微分方程式の境界値問題となり，それらの可解性は自明ではないが，その特解を得ることが出来た．更にそれらの解は通常の流体モデルでは表現できなかった粒子系の運動特有の性質を表現できることがわかった．すなわち(1)では，角度のついた平面上における平面平行流において，その表層付近と底面付近での流れ方の差異が生じるケース（密度折れ曲がり解）の存在，(2)と(3)では，定常解として，密度一定解だけではなく，密度函数のグラフがサイクロイド曲線で表される解（サイクロイド解）が得られた．これは密度分布の局在性を表し，粒子系の運動でしばしば観察される現象を表現し得るものと期待できるものであった．これらの本モデル特有の定常解の性質は非定常な運動を考える上で重要であるため，本研究では密度一定解とサイクロイド解に対する考察を基にして，本モデルで表される現象の本質的な理解を狙うことを目標とした．

## ２．研究の目的

本研究では，これまでに得られた上記１-(1)と１-(2)の密度勾配依存モデル特有の定常解の性質に注目し，定常解に対する更なる理解と非定常流の定性的・定量的性質を数学解析と数値解析の両面から明らかにすることを目的とした．このような非線形性の強い系で解の詳しい情報を引き出そうとするならば，数学解析だけでなく数値解析的アプローチも必須である．具体的には以下の４点である．

(1) 本モデルの非定常問題の適切性：それまでに得られた数値計算によると，本モデルを単純に空間一次元に簡単化した方程式系の初期値問題では有限時間で密度函数のグラフが尖ることが観察される．このため，空間一次元であってもその適切性は自明ではなく，時間大域解の一意存在性を数学的に証明することは重要である．これにより，問題の適切性を担保することで数値計算実施の有意性を保証できる．

(2) 空間一次元問題における密度函数の挙動の数値的検証：空間一次元問題では密度函数が尖ることが本当に密度勾配依存応力モデル特有の現象なのか，それとも実際には解は尖っておらず低解像度の数値計算に起因することなのか，それらを明確にするために，数値解析的に精査する．

(3) サイクロイド解の安定性と選択性：１-(2)と１-(3)で得られた定常解としてのサイクロイド解は無限個存在し，境界条件だけでは決して一つに定めることは出来ない．元々粒子状の物体は内部粒子配置にある程度の任意性があるため，粒子間隙も考慮した粒子系のスケールでの連続体に対しては，密度函数（＝配置）の非一意性はむしろ自然と言ってよい．これまでに得られた非定常問題

の数値計算によると，パラメータによって異なるサイクロイド解への収束が確認されていたため，解の分類や定常解の選択性（非定常解の漸近挙動）の議論は，粒子系の運動の内部ダイナミクスの理解の上で重要であると言える．
(4) スケール極限：Couette 流に対する方程式を無次元化すると，代表スケール（管幅）は密度勾配依存項の係数にのみ掛かり，応力が密度勾配に依存する度合いは空間スケールと関係があることが分かる．代表スケール無限大の極限では通常の流体のスケールとなり，内部粒子配置は一様化され，解の一意性が回復するはずである．ただし，スケール極限において，速度場は各点収束するものの，密度函数はサイクロイド解から密度一定な解に各点収束しない．この極限の実態をサイクロイド解の極限の正当化を数学的に証明することで，本モデルにおける連続体スケール極限での特徴付けを与える．

密度勾配依存モデルの数学解析はこれまで十分なされておらず，本モデル特有の定常解に注目して粒子系連続体の具体的な運動の定性的・定量的解析を試みる研究はこれまでには十分にされてこなかった．これらの問題では，方程式における密度勾配の非線形依存性により，密度勾配がある種の不連続性を持つ場合も解として許容出来ることが分かる．この性質は通常の流体モデルでは決して表現出来なかったが，粉粒体流や交通流では密度勾配が不連続な場合が起こりえるため，これを巧く表現できるモデルとなっていると期待される．その特異的な解の解析から，数学解析としても数値解析としても新しい知見を蓄積するのが本研究の趣旨である．また，本研究を通じて，工学的な有用性のあるモデルの数学的正当化に貢献することが出来る．これは，粒子系の運動，非線形連続体モデルにおいても新しい概念を提示するものであり，本質的に意義ある研究であると考えている．

## ３．研究の方法

本研究で対象とする密度勾配に依存する応力を持つ連続体モデルは，密度函数と速度場ベクトルを未知函数にもつ非線型偏微分方程式系によって与えられ，その主要項に密度函数に関する退化非線型項を含んでいる．そのため，代表的な定常問題に対して詳細な解析をおこなった．主として，本モデル方程式に特有な性質を持つ特解であるサイクロイド解の性質を数学解析的，かつ数値解析的におこなった．また，非定常問題に対しては，サイクロイド解のみに限定せず，正則化した方程式系に対して数学解析と数値解析をおこなった．

## ４．研究成果

単純剪断流である Couette 流の解は，密度が一定でかつ速度場が放物線で表される有名な流れのプロファイルと，密度函数のグラフが空間方向にスケールされたサイクロイド曲線で表される非自明な定常解（サイクロイド解）の 2 種類があることがわかる．後者は，密度勾配の不連続または発散を許す特異な定常解であり，このモデル方程式特有の性質である．このサイクロイド解のスケール極限と密度一定解の線型安定性に関して，日本流体力学会年会 2013 において成果を発表した．このサイクロイド解は，空間変数の次元を単純に 1 にする問題においても定常解として現れるため，この解析は Couette 流の解析だけでなく，空間 1 次元問題に対しても有効であることが見出された．滑らかな初期値から出発してもこの特異的な定常解に漸近するのであれば，密度函数の 2 階導函数は発散するため，時間発展方程式の適切性の議論が重要である．また，重ラプラシアンによる正則化項を付与した本モデルの空間 1 次元方程式系に対して，周期境界条件を課した初期値問題での有限差分法による数値計算では，滑らかな初期値に対しても，有限時間内にその解（密度函数）のグラフが尖ることが観察されたため，非定常問題の適切性を示すため，その周期境界条件での正則化空間 1 次元問題に対する時間局所解の一意存在性を証明した．密度函数を既知とするときの方程式系は速度場のノルム評価が閉じるため，特性曲線の方法を用いた運動方程式と速度場を既知とした連続の式を連立した逐次近似法を用いて時間局所解の存在性を証明する．

この方程式系の非定常解は，初期値によっては有限時間内に特異点（密度函数のグラフの尖り）が発生することが数値計算により得られたが，それが低解像度に起因する可能性も否定できなかった．したがって，解の特異性を特徴付けるためにその尖りの突端部分の詳細な解像を試みた．方程式系を速度場に関する重ラプラシアンによって正則化した方程式系の離散化は，空間方向は擬スペクトル法，時間方向は 4 次ルンゲ＝クッタ法を用いた．この方程式系の時間発展方程式の解を，特異性が発生すると思われる時間まで数値積分した．本モデル方程式は硬い系であるため，時間刻みを通常の流体モデルより小さくせねばならず，時間方向に 4 次ルンゲ＝クッタ法を用いると倍精度演算では丸め後さの影響が無視できなくなった．このため，京都大学大学院情報学研究科の藤原宏志助教の開発された多倍長計算ライブラリを用いた多倍長計算によって計算精度を確保した．また，この数値計算は，計算時間と計算量がかさむため，京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータ共同研究制度（若手奨励枠）を利用して実施した．これにより，空間離散化で用いた擬スペクトル法における切断波数を増やすことで，数値解の列はあるグラフに漸近することが確認できた．これはある特異解に収束することを示唆してお

り，正則化方程式系の特異的な性質を解像できたといえ，数値解析的にも有意義な成果であるといえると考えている．
　サイクロイド解は応力における密度勾配の二次依存性によって得られるものであるが，この二次の非線型性は数学解析の一般論に乗りづらい反面，特異性を包容できる性質も併せ持っている．この性質を用いると，境界条件や全質量条件を課した場合でも定常問題の解は，サイクロイド解に限定したとしても，無限に構成することができる．そのため，サイクロイド解の安定性について議論する必要があった．この密度勾配依存応力モデルの非定常問題では，密度が一様に均される場合とサイクロイド解に漸近する場合とが併存するケースがあり，系のパラメータだけではなく，解の（局所的な）プロファイルにも依存して変動することが確認された．まだこの漸近挙動を明らかにする系のパラメータに付加すべき本質的な量を見出すことはできず，安定性・不安定性の解析は道半ばの状態ではある．実際，元来この系の定常解は無限に存在し，相空間における固定点が面的に張られているために漸近解析は極めてチャレンジングな問題であった．しかしながらも挙動が解のプロファイルに依存するなどの数値的傍証を得ることはできたため，今後の解析に期待がもたれる．
　密度勾配依存応力のモデル方程式を無次元化し，流れの幅に関するパラメータに関するスケール極限を取ると，方程式自体は密度勾配に依存しない通常の Naiver-Stokes 方程式に収束する．この場合解も同様に Navier-Stokes 方程式の解に収束するのは非自明である．これについて，解のスケール極限について Couette 流に限定して解析した．速度場は Navier-Stokes の解である二次函数に一様収束する．一方で，密度函数は密度一定解には各点収束せず，また $L^1$ 収束することがわかった．これは密度函数が速度場と比べてサブスケールの変数であることを意味している．非定常問題の場合は特性曲線の方法で解くために密度函数は速度場の函数として定式化できるが，一方で定常問題では密度差によって生じる応力によって流れが駆動されていることがわかる．すなわち速度場は密度函数の積分によって表現できるのである．そのため，持つべきスケールも密度函数と速度場で異なることは自然である．また，密度函数は総質量，運動量，エネルギーなどの積分量の計算する場合の重みとして用いられる．そのため，測度論的枠組みによる解析の方向性も検討する価値があるといえる．
　また，流体方程式の数値解析的研究から副次的に得られた研究が進展し，解析的な解の表示公式非定常解の数値計算スキームの理論を基にする離散的数理モデリング手法を考案するに至った．密度勾配応力モデルは多体粒子系の運動モデルとして定式化されたものであったが，その考案した手法によって離散的な数理モデルが導出できるため，相補的な役割を果たしている．

## ５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）
①A. Kawaharada, T. Miyaji and N. Nakano, Analysis of a method for constructing a cellular automaton from a continuous system, International Journal of Networking and Computing, 査読有，6 巻，2016，掲載確定.

〔学会発表〕（計２件）
①中野直人，密度勾配依存応力を持つ連続体モデルに対する Couette 流の定常解について，日本流体力学会年会 2013, 2013 年 9 月 12 日，東京農工大学小金井キャンパス（東京都府中市）

②中野直人，密度勾配に依存する連続体モデルの単純剪断流について，東北大学応用数学セミナー，2013 年 4 月 25 日，東北大学青葉山キャンパス（宮城県仙台市）

## ６．研究組織

(1)研究代表者
中野　直人（NAKANO，Naoto）
北海道大学・大学院理学研究院・研究院研究員
研究者番号：３０６１２６４２