

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887009

研究課題名(和文) 局所ラングランズ対応とLubin-Tate perfectoid空間

研究課題名(英文) Local Langlands correspondence and Lubin-Tate perfectoid space

研究代表者

津嶋 貴弘 (TSUSHIMA, TAKAHIRO)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・助教

研究者番号：70583912

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：局所ラングランズ対応と局所ジャック・ラングランズ対応をLubin-Tate perfectoid空間の幾何学を通じて理解する研究を行った。尖点表現の中で分岐型という表現のクラスがあり、このクラスの最も簡単な表現でepipelagic表現と呼ばれるものがある。この表現に対するLubin-Tate perfectoid空間の中のアフィノイドとその形式モデルを構成し、その還元のコホモロジーに現れる表現の対応を研究した。対応は二組作られ、内一つが局所ジャック・ラングランズ対応と一致することを示した。その結果、表現論のタイプ理論におけるBSS予想をepipelagic表現に対して解決することができた。

研究成果の概要(英文)：We have studied Galois representations in a view point of Langlands program. More concretely, we have studied the local Langlands correspondence and the local Jacquet-Langlands correspondence geometrically through geometry of Lubin-Tate perfectoid space. An epipelagic representation means an easiest cuspidal representation of ramified type of a general linear group over a non-archimedean local field. For such representations, we have constructed a family of affinoids and its formal models, and studied the middle cohomology of the reductions of the models in a representation theoretic view point. As a result, we have constructed two correspondences between representations. We have proved that one of them corresponds to the local Jacquet-Langlands correspondence for epipelagic representations. As a by-product, we have shown the B-S-S conjecture for epipelagic representations. This conjecture asserts the compatibility of types under the local Jacquet-Langlands correspondence.

研究分野：数論幾何学

キーワード：ガロワ表現  
タイプ理論 Lubin-Tate perfectoid空間 局所ラングランズ対応 局所ジャック・ラングランズ対応

### 1. 研究開始当初の背景

Scholze が perfectoid 空間の一般論を構築しそれを用いて Weight monodromy 予想に大きな進展をもたらした。それを受けて Weinstein が Lubin-Tate perfectoid 空間を定義し、その中のアフィノイド部分空間と形式モデルを構成し、その還元の間コホモロジーに不分岐型の尖点表現が実現されていることを示した。

### 2. 研究の目的

数論幾何学の研究主対象の一つであるガロワ表現をラングランズ対応の観点から理解することを目的とする。特に一般線型群に対する局所ラングランズ対応と局所ジャック・ラングランズ対応を Lubin-Tate 空間の局所的幾何の理解を通じて幾何学的に理解・実現することが目的である。

### 3. 研究の方法

Lubin-Tate 空間の中のアフィノイドとその形式モデルを CM 理論やタイプ理論を通じて構成する。その還元のエタールコホモロジーを SGA4 1/2 の技術を用いて解析する。その表現論的構造をタイプ理論の観点から解析する。またガロワ表現に伴うイプシロン因子を理解するために Deligne や Henniart の技術を用いる。一方で尖点表現のイプシロン因子 (Godement-Jacquet 局所定数) については Bushnell による非可換ガウス和を用いた記述を使って計算する。

### 4. 研究成果

$p$  を素数とする。

以下のスローガンのもとに研究を行った：「数論と深い関係にある局所体上の代数多様体を  $p$  進解析空間と見なして、その部分アフィノイド空間でその還元がガロワ表現として面白い中間コホモロジーを持つものを構成する。その多様体が群作用を持つときには、その群の表現として還元のコホモロジーを解析する。」このスローガンにお

いて多様体は最初から  $p$  進解析空間の場合もある。最も望ましいことは多様体の安定モデルを完全に知り、そのコホモロジーを完全に記述することであるが、一般次元では安定モデルの存在が分かっていないし、具体的な場合でも完全に記述することは困難である。そのため安定還元の完全な記述は諦めて、重要な一部だけを見るというのがスローガンの内容である。このスローガンの難点としては、ある一部のアフィノイドの還元の間コホモロジーを解析したとしても、それが元の多様体のコホモロジーの部分表現になっているか、保証できない点にある。ただし、以下で述べる具体的場合では、そうなっているとほとんど確信できたり、実際証明できるのでこのスローガンはある程度有用な代替案であると考えられる。以下、具体的な場合に何をどれくらい明らかにしたかを述べる。

$K$  を非アルキメデス局所体とする。その剰余標数を  $p$  とする。  $h$  を 2 以上の自然数とする。導手が  $h + 1$  の  $\mathrm{GL}_h(K)$  の尖点表現を epipelagic 表現と呼ぶ。  $h$  次元の Lubin-Tate perfectoid 空間の中に、ある種のアフィノイドとその形式モデルを構成し、その還元の間コホモロジーに epipelagic 表現がすべて現れることを証明した。その中間コホモロジーを用いて、epipelagic 表現に関する局所ジャック・ラングランズ対応の幾何的実現を証明した。例えば  $p \nmid h$  の時には、上記のアフィノイドの形式モデルの還元として、非退化な二次形式に付随する Artin-Schreier 多様体が現れる。この多様体は Coleman-McMurdy が発見した  $X_0(p^3)$  の中のアフィノイドの還元 of 自然な高次元化

になっている。このコホモロジーに局所ジャッケ・ラングランズ対応が実現されることを示すためにイプシロン因子や指標の計算を詳細に行った。局所ジャッケ・ラングランズ対応は、Secherreが発展させたタイプの理論とこの対応を一意的に特徴付ける指標の関係式の両辺を実際に計算することで成された。その指標の値にある種のガウス和や Kloosterman 和などが現れて興味深い。SGA4 1/2 において Deligne によって調べられていた Kloosterman 和についての初等的性質を用いて、対応する表現を特定した。更にこの過程で、タイプ理論における Broussous-Secherre-Stevens の予想を epipelagic 表現に対して解決することができた。 $p|h$  の場合を含めたこのような幾何学的研究はこれまでなかったので非常に希少である。またタイプ理論的にも新しい帰結を持つため本研究は、意義深いものであると考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Takahiro Tsushima, On the stable reduction of the Lubin-Tate curve of level two in the equal characteristic case, J. Number Theory 147 (2015), 184-210. (査読有り)

② Takahiro Tsushima, Stable reduction of  $X_0(p^4)$ , to appear in Journal für die reine und angewandte Mathematik DOI:10.1515/crelle-2013-0081. (査読有り)

③ Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Explicit construction of semi-stable models of Lubin-Tate curves with low level, Algebraic number theory and

related topics 2012, 15- 31, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014. (査読有り)

[学会発表] (計 4 件)

① Takahiro Tsushima, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, 「九州代数的整数論 2014」、九州大学、2014/2/5.

② Takahiro Tsushima, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, 「プロジェクト研究集会 2013」、箱根高原ホテル、2014/3/4.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津嶋 貴弘 ( TSUSHIMA TAKAHIRO )  
東京大学大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号： 70583912

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：