

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14602

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887039

研究課題名(和文)3次元多様体のヘガード分解や絡み目の橋分解の距離に関する研究

研究課題名(英文) Research on distances of Heegaard splittings of 3-manifolds and bridge splittings of links

研究代表者

張 娟姫 (Jang, Yeonhee)

奈良女子大学・自然科学系・助教

研究者番号：90708348

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：与えられた2以上の自然数をヘンベル距離として持つヘガード分解及び絡み目の橋分解の存在を証明し、更にその距離を実現する円盤の対が一意的であるものも存在することを示した。また、結び目の橋分解の間の関係をグラフで表すことができることに注目し、新しいタイプのグラフがある種の結び目の橋分解の関係を表すことを示した。特にこの結び目は「極小的であるが最少ではない」橋分解を持つ興味深い例でもある。

研究成果の概要(英文)：We proved that, for any integer  $n$  greater than 1, there exist Heegaard splittings of 3-manifolds and bridge splittings of links whose Hempel distance is exactly  $n$ . Moreover, we showed the existence of Heegaard splittings for which there is a unique pair of disks realizing the distance. Also, we focused on the fact that relationship between bridge splittings of a knot can be described by a graph, and showed that a new type of graph can describe such relationship of a certain knot, which is an interesting example admitting bridge splittings that are locally minimal but not globally minimal.

研究分野：位相幾何学

キーワード：ヘガード分解 絡み目の橋分解 ヘンベル距離

## 1. 研究開始当初の背景

Perelman により Thurston の幾何化予想が解決される等、近年低次元位相幾何学において大きな進展があったが、まだ 3 次元多様体の位相的・幾何的性質について十分に分かっているというには程遠く、例えば、3 次元多様体内の曲面や 3 次元多様体の組み合わせ構造、またそれらが多様体の位相的・幾何的性質とどの様に関係しているかについて、まだ明らかにすべき問題が多く残っている。特に、Hempel により 3 次元多様体のヘガード分解の「距離」という概念が導入されて以来、多様体のヘガード分解の間の関係、ヘガード分解と多様体の幾何構造の関係等に関する興味深い研究がなされてきたが、具体例の構成やヘンベル距離の評価が容易ではなく、応用面においてもまだ様々な発展の余地があるように見えた。

3 次元多様体のヘガード分解と絡み目の橋分解は、両方とも「複雑な対象を単純な対象に分ける」という考え方に基づいた概念で、長年古典的な研究がなされてきた。しかし、1987 年に Casson-Gordon によってヘガード分解の強い既約性という概念が導入され、更にその一般化として 2001 年に Hempel によってヘガード分解のヘンベル距離が導入されて以来、この方面の研究が急速に進んだ。ヘガード分解や橋分解のヘンベル距離は多様体や絡み目固有の複雑さを良く反映していることが知られており、特に、高いヘンベル距離の分解を持つ多様体又は絡み目は幾何学的な意味で複雑で、ある種の剛性を持つことがいえる。

高いヘンベル距離のヘガード分解の存在については Hempel 自身によって示され、その後 Evans 等により幾つかの別証明が与えられている。彼らによって構成されたヘガード分解に対して、そのヘンベル距離を正確に判定することは困難である。

また、与えられたヘガード分解や橋分解のヘンベル距離を下から評価することも、まだ残っている大きな問題の一つである。これまで Casson-Gordon や Hempel, Berge によってヘガード分解のヘンベル距離が 2 以上であることの判定法と 3 以上であることの判定法が知られている。また、橋分解に関してもヘンベル距離が 2 以上であることを判定する方法が高尾和人氏によって与えられ、その応用によって局所的には最小であるが、全体の中では最初でないという興味深い橋分解の例が構成された。

## 2. 研究の目的

本研究では、3 次元多様体のヘガード分解と絡み目の橋分解の関係を明確にさせ、その

関係を用いることでそれぞれの持つ位相的・幾何的性質を明らかにすることを目標とした。具体的には、次の様な問題を解決することを中心に研究を行ってきた。

(1) 与えられた非負の整数  $n$  に対してヘンベル距離が丁度  $n$  のヘガード分解や橋分解を構成し、この様な分解を (ヘガード図式や橋図式等を用いて) 目に見える形で表す。また、ヘンベル距離  $n$  の分解を持つ多様体・絡み目で、オイラー票数が  $2-n$  の本質的曲面を許容するもの (Hartshorn 等によるヘンベル距離の評価における等号を実現する例) を構成することで、ヘガード分解や橋分解のヘンベル距離が多様体や絡み目そのものの幾何的性質をよく反映していることを示すより強い根拠を与える。

(2) 与えられたヘガード分解又は橋分解のヘンベル距離を下から評価するための (新しい) 条件を与え、多様体や絡み目の極小性、双極性の判定等に応用する。

## 3. 研究の方法

(1) Masur-Minsky により導入された部分曲面への射影を活用して、ある性質をみたす曲面の曲線複体内の測地線を構成できることを示し、その測地線とハンドル体の円盤複体の性質を用いることで、与えられた自然数をちょうどそのヘンベル距離として持つヘガード分解の存在を証明することに取り組んだ。更に、そのヘガード分解や橋分解がどのような性質を持つのか、様々な観点から考察した。また、上記の測地線の構成法及び (Li によって知られていた) 部分曲面への射影による円盤複体の象に関する議論を精密化し、絡み目の橋分解に応用することで、与えられた自然数をちょうどそのヘンベル距離として持つ絡み目の橋分解の存在を証明することにも取り組んだ。

(2) 結び目の橋分解のヘンベル距離が 2 以上であるための十分条件が高尾和人氏によって知られていたが、その手法を精密化し、より効率の良い判定条件を与えることに取り組んだ。更に、既存の方法ではその極小性を示すことが困難だったある種の橋分解に対して、新しく得られた判定法を用いることで極小性を示すことにも取り組んだ。また、ヘガード分解に対して、ヘンベル距離が 3 以上であるための十分条件が Hempel や Berge 等により知られていたが、Berge の議論を結び目の橋分解に応用することで、与えられた橋分解のヘンベル距離が 3 以上であるための十分条件が得られることを考察した。更にその条件を精密化し、より強い判定条件を得ることはできないか、という問題にも取り組んだ。

#### 4. 研究成果

(1) 奈良女子大学の小林毅教授, 井戸絢子氏との共同研究により, 与えられた  $n$  と  $g$  に対して, ヘンペル距離がちょうど  $n$  である種数  $g$  のヘガード分解が存在することを証明した. 更に, その手法を精密化して絡み目の橋分解に応用することで, 与えられた  $n, g, b$  に対して, ヘンペル距離がちょうど  $n$  の  $(g, b)$ -橋分解が存在することも証明した. 更に, 与えられた 3 以上の自然数をちょうどヘンペル距離として持つヘガード分解で, その距離を実現する円盤の対が一意的であるという性質をみたまも必ず存在することを証明することができた.

(2) 奈良女子大学の小林毅教授, 駒澤大学の小沢誠教授, 九州大学の高尾和人氏との共同研究により, 「極小的である(他の橋分解から安定化操作で得られない)が最小ではない」橋分解の新しい例を 2 種類挙げることができた. 特にこれらの例は, 一つの結び目の二つの橋分解でその橋数の差がいくらでも大きくなれることや, 一つの結び目が橋数の相異なる極小的橋分解を無限個持つことが出来ることを示す興味深いものである.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Ayako Ido, Yeonhee Jang and Tsuyoshi Kobayashi, Bridge splittings of links with distance exactly  $n$ , *Topology and its Applications*, 査読有, 掲載決定.

Ayako Ido, Yeonhee Jang and Tsuyoshi Kobayashi, Heegaard splittings of distance exactly  $n$ , *Algebr. Geom. Topol.*, 査読有, Vol. 14, No. 3, 2014, pp. 1395-1411.

Yeonhee Jang, Distance of bridge surfaces for links with essential meridional spheres, *Pacific J. Math.*, 査読有, Vol. 267, No. 1, 2014, pp. 121-130.

Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Yeonhee Jang and Kanako Oshiro, A  $G$ -family of quandles and handlebody-knots, *Illinois J. Math.*, 査読有, Vol. 57, No. 3, 2013, pp. 817-838.

[学会発表](計 1 1 件)

Ayako Ido, On keen Heegaard splitting, The Tenth East Asian School of Knots and Related Topics, 2015 年 1 月 27 日, Shanghai (中国).

小林毅, On keen Heegaard splitting, *Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds*, 2014 年 10 月 27 日, 国際奈良学セミナーハウス(奈良市).

井戸絢子, On keen Heegaard splitting, 東北結び目セミナー, 2014 年 10 月 19 日, カレッジプラザ(秋田市).

Yeonhee Jang, Bridge splittings of links with Hempel distance  $n$ , A Satellite Conference of Seoul ICM 014: Knots and Low Dimensional Manifolds, 2014 年 8 月 23 日, Busan (韓国).

Yeonhee Jang, Knots with non-minimal destabilized bridge spheres, The 6<sup>th</sup> TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics, 2014 年 7 月 22 日, Daegu (韓国).

Yeonhee Jang, On Hempel distance of bridge splittings of links, Advanced School and Discussion Meeting on Knot Theory and its Applications, 2013 年 12 月 19 日, IISER Mohali (インド).

張娟姫, 曲面上の曲線が作る複体とその応用, 数学・物理学・情報科学の研究交流シンポジウム, 2013 年 12 月 7 日, 奈良女子大学.

張娟姫, 絡み目の橋分解とその周辺 I, II, III, 幾何解析とその周辺, 2013 年 11 月 3-4 日, 石垣市総合体育館研修室(沖縄県・石垣市).

張娟姫, On distance of Heegaard splittings and bridge decompositions, 研究集会「低次元多様体の基本群とその表現に関する様々な構造について」, 2013 年 10 月 31 日, 国際奈良学セミナーハウス(奈良市).

Tsuyoshi Kobayashi, Heegaard splittings of distance  $n$ , International Conference of Topology and Geometry 2013 – Joint with Sixth Japan-Mexico Topology Symposium, 2013 年 9 月 3 日, 島根大学.

Yeonhee Jang, Heegaard splittings of Hempel distance  $n$ , The 5<sup>th</sup> KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics, 2013 年 7 月 23 日, 大阪市立大学.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)  
取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ：

<http://www.geocities.jp/yyyjang>

## 6．研究組織

### (1)研究代表者

張 娟姫 (JANG, Yeonhee)

奈良女子大学・研究院自然科学系・助教

研究者番号：90708348