

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26285205

研究課題名(和文)多世界パラダイムに基づくわり算概念の構成過程に関する理論的・実際研究

研究課題名(英文)Theoretical and Emprical Research on the Construction Process of the Concept of Division based on the Multi-World Paradigm

研究代表者

中原 忠男(Nakahara, Tadao)

広島大学・教育学研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：90034818

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、わり算の調査問題を開発し、その調査を通して、わり算の達成状況の実態、構成過程、困難点などを解明し、それを多世界パラダイムに基づいて解釈し、わり算指導の改善策を導出することを目的とした。

調査問題については、本研究の目的を踏まえ先行研究を基に創意を加え、小学4年生から6年生までの学習内容を対象として、6セットからなるものを作成した。それを用いた調査結果を、等分除とその拡張、包含除とその拡張、倍に関わるわり算に分けて分析し、特に等分除の拡張と倍に関わるわり算に大きな困難点があることを指摘した。さらに、授業実践などを踏まえて、意味づくりと道具づくりの相互作用の重視などの改善原理を導出した。

研究成果の概要(英文)：This research has three main objectives The first is to develop tests for clarify the actual performance situation and the construtive process of the concept of division. The second is to clarify the construtive process and misconceptions of division by analyzing results of the longitudinal and cross-sectional survey. The third is to propose the improvement of lesson of division in the elementary level. Firstry, we developed six sets of tests of division, for 5th to 7th grader, which could reveal difficulties of understanding the meaning of division. Secondary, we analyzed the results of the tests by three part, that is, dividing division & its extention, including division & its extention, and division using how many times as. Thridy, we proposed the implovement principle, such as interaction of making sence of division and using tools for solving story problem of division, for teaching devision.

研究分野：教科教育学(数学教育学)

キーワード：算数教育 わり算 構成主義 社会文化主義 相互作用主義 達成度

1. 研究開始当初の背景

(1) わり算の理解は子どもにとって容易ではない。そこで、意味理解を大切にする指導についてこれまでにいろいろな研究・提案がなされてきている。しかし、現在においてもなお満足できる状態にはなく、課題が指摘され続けている。例えば、国立教育政策研究所教育課程研究センター「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ」においては、除法にかかわる理解について、次のような課題が指摘されている。

基準量よりも比較量の方が小さい場面で、何倍かを求めるために除法が用いられることの理解に課題がある。

商が1より小さくなる等分除「(整数) ÷ (整数)」の場面で、除法が用いられることの理解に課題がある。

2. 研究の目的

上記のような課題は、表面的な指導の手立てを提言するだけでは解決されない。わり算の適用場面は多様であり、その理解には様々な要素が関連しているため、部分的ではなく系統的な、そして深層に至る指導の改善が求められる。そうした認識の下で、本研究は具体的には次の3つのことを目的とした。

(1) 子どものわり算概念の様相、困難点や構成過程を総合的、体系的に把握するための調査問題を開発する。

(2) その調査問題による調査・分析を通して、子どものわり算概念の理解・構成過程の状況、問題点などを体系的に解明し、わり算指導の改善指針を導き出す。

(3) 解明された問題点や改善指針をもとに授業実践を通して、わり算概念の構成実態を把握するとともに、それを基にして、わり算概念の望ましい構成を可能とする授業原理を構築、提言する。

3. 研究の方法

本研究においては、次の3つの方法を用いる。

(1) 調査的方法

子どものわり算概念の理解・構成の様相を体系的に把握するために、調査問題を開発し、それを用いた調査・分析を行う。

(2) 実践的方法

わり算概念の理解・構成の実態を把握し、授業改善の原理を導き出すために、実践授業を行い、それを分析する。

(3) 解釈的方法

調査や授業の分析・検討においては急進的構成主義、社会文化主義、相互作用主義の3つの認識論を基盤とした解釈的方法を用いる。

4. 研究成果

(1) わり算概念の調査問題の開発

これまでにわが国でなされた調査は、課題があると指摘されてきた問題を使ったものが多く、わり算概念の理論的検討に基づいて包括的に調査しようとするものではなかった。また、特定の学年に絞ったものが多く、縦断的・経年的なわり算概念の構成過程までは十分に捉えられていない。加えて、正答率に大きな影響を与える問題文の諸条件、例えば被除数と除数の大小、順序や図の有無など、を考慮した調査問題による調査も、筆者らの知る限りわが国では行われていない。

そこで本調査は、以下の3点に留意して調査問題を開発・作成、セット化した。

整数のわり算から小数、分数のわり算へと至るわり算概念の構成の変容・発展を縦断的、横断的に明らかにできる作問

等分除とその拡張、包含除とその拡張、倍に関わる問題に着目した作問

正答率に大きな影響を与える問題文の諸条件に着目した作問

とくに、については、以下のような諸条件に着目して調査問題を開発、作成した。

【問題文の諸条件】

イ) 「小 ÷ 大」(商が1より小さい)か否か
 ロ) 数値の影響、例えば「割り切れ易さ」「純小数か帯小数か」「真分数か仮分数か」など

ハ) 数値の順序、被除数と除数の順序など
 ニ) 量の種類、離散量か連続量かなど

ホ) 図、言葉の式などの有無

ヘ) キーワードを強調するか否か

ト) 問題文の表現

具体的には、上記の、を踏まえながら、に着目して、小4、5、6におけるわり算概念に関わる学習内容に応じて、調査問題を作成した。主な内容は次の通りである。

・小4の整数のわり算になる場面からの立式
 ・小5の整数、小数のわり算になる場面からの立式

・小6の分数のわり算になる場面からの立式
 なお、わり算概念に焦点を当てるので、わり算の計算問題は扱わないこととした。したがって、主として文章題を扱い、諸条件の違いによる学年間の縦断的分析を可能とするために、各学年に同一問題を配置し、さらに、学年ごとの横断的分析を可能にするために、学年ごとに2種類の問題セット(A問題、B問題)を作成した。なお、各セットには、答えを求める式がわり算にならない問題(加減乗の問題)を“ダミー”として加えて、合計20問程度で1セットとした。問題形式は、主として答えを求める式を記す単純な記述式あるいは選択式をとっており、立式のための根拠は問わないこととした。

この調査問題は、本調査だけでなく、今後におけるわり算概念の実態把握にも有効であると考えている。

(2)調査結果の分析・考察

これについては、等分除とその拡張、包含除とその拡張、倍に関わるわり算の3つに分けて研究を進めた。その結果、包含除とその拡張については正答率もよく、大きな問題点は見いだされなかった。他方で、あとの2つについては大きな問題点があるといふと見いだされた。ここではそれらについて記していく。

(2-1)等分除とその拡張の理解状況

これについての主要な結果は以下のとおりである。

正答率からみると全体的には、「 \div 整数」「 \div 小数」「 \div 分数」の順に、理解が進んでいる。

「等分」のキーワードを含んだ「 \div 整数」や余りのある「 \div 整数」の正答率は高く、良好である。

「 \div 小数」に関する正答率はおおむね良好である。また、除数の数値のタイプ別の正答率は、「 \div 帯小数」「 \div 純小数」である。

基本的な「 \div 整数」であっても、中学校第1学年において、50%~60%の正答率にとどまっている問題がある。また、これらの問題では、小学校高学年から中学校第1学年にかけて、正答率が低下する傾向にある。

「 \div 分数」の正答率は全体的に65%以下で低い。また、除数の数値のタイプ別の正答率は、「分数 \div 整数」「分数 \div 単位分数」「分数 \div 分数一般(除数 被除数)」および「分数 \div 帯分数(除数 被除数)」の順である。

こうした結果となる背景には以下のような考え方があると解釈される。

「 \div 整数」において、「わり算の式は、いつも「大 \div 小」になる」という考えに基づいて立式する。

「 \div 整数」や「 \div 分数」において、問題文に現れる数値の順に単純に立式する。

「 \div 小数」では、除数が1より大きいかどうかによって、次のような誤答の傾向がある。

「 \div 帯小数」の場合、除数の整数部分によって、わり算の演算決定は比較的容易になるが、被除数と除数の決定において困難を抱える傾向がある。

「 \div 純小数」では、むしろ、わり算の演算決定自体が相対的に困難になり、その結果、かけ算の式を立式してしまう傾向がある。

「 \div 分数」では、除数の数値によって、次のような誤答の傾向がある。

「分数 \div 整数」や「分数 \div 帯分数」では、わり算の演算決定は相対的に容易になるが、被除数と除数を逆にした誤答が相対的に増加する。

「分数 \div 単位分数」や典型的な「分数 \div 分数」では、わり算の演算決定自体が相対的に困難になり、その結果、かけ算の式を立式する誤答が相対的に増加する。

上記のことから、とりわけわり算の演算決定、被除数と除数の決定に着目した指導の改

善が強く求められる。

(2-2)倍に関わるわり算

何倍かを求めるわり算の理解状況

「 \div 整数」「 \div 小数」「 \div 分数」のすべてにおいて、商 <1 となる問題の正答率が70%以下であり、低い。純小数倍を捉える難しさを改めて確認できた。小 \div 大の難しさに関わり、長いテープと短いテープの比較から、「長い \div 短い」という考えが生じやすくなったと考えられ、もとにする量と比べる量の判断が十分についていないことが指摘できる。

何倍かした数を求めるかけ算の理解状況
倍に関するかけ算の理解を見ると、整数 \times 整数では5年生で8割以上の正答率があり、分数 \times 分数の判断においても、6年生で74%の正答率であった。このことは、わり算の指導で、かけ算をもとにした考え方が、ある程度は、子どもに通用することを示している。

倍でわるわり算の理解状況

全体的に正答率が70%以下と低く、課題がある。とりわけ、「赤いテープは4mです。赤いテープは青いテープの2倍です。青いテープは何mでしょうか。」のように、出てきた数の順の通りに式が $4\div 2$ になる問題を「順」、
「白いテープの2倍が、黄色いテープです。黄色いテープは4mです。」のように、数の提示順が式とは逆になるものを「逆」とすると、「順」の方の正答率が10%以上低く、これに大きな課題があることが示された。

学年進行に関する伸びを見ると、倍でわるわり算は伸びがほとんどなく、中学1年にかけてダウンする。数値の形式的処理でなく意味が問われる問題場面では特に正答率の減少が著しく、意味理解の重要さを示している。

倍でわるわり算と他の計算場面との比較
倍に関わる計算の間で比較すると、かけ算の問題の正答率が最も高く、続いて倍を求めるわり算、最後に倍でわるわり算となっている。これらは、倍でわるわり算の理解が、いかに困難なものであるかを示している。

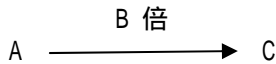
(3)わり算指導の改善に向けて

(3-1)授業実践

調査の結果、とくに正答率が低く、わり算概念の構成や理解においてポイントとなると考えられる学習内容に焦点を当てて、3年生から6年生においてそれぞれ指導の改善につながる授業実践を試みた。実践した授業のねらいや主要な結果は以下のとおりである。

3年生：三項図の活用

小数や分数のかけ算・わり算の立式に役立つ図的表現として線分図が多く使用されている。この図は数量関係を豊かに表現するもので構造的である点もよい点と言える。ただ、それだけに複雑すぎて、「道具」としての有効性は今一つと考える。これに対して、下記のような3項図はシンプルであり、本授業を通して、それが立式に役立つ可能性が示唆された。



文章題から A、C のところに何が入るかを判断する点に課題があるけれども、この授業で用いられた「ものさし」という表現が一つの手立てであると受け止められた。したがって、3 項図を 3 年生あたりから意図的、系統的に指導・活用する方策を検討してみる価値があると考えられる。

4 年生：「小÷大」の立式

$4 \times 8 =$ 、 $\quad \times 8 = 4$ 、 $8 \div 4 =$ 、 $4 \div 8 =$ の 4 つの式の中から文章題に合う式を選ぶという内容の授業を実践した。文章題は 2 つ示され、一つが「 $8 \div 4 =$ 」、もう一つが「 $4 \div 8 =$ 」「 $\quad \times 8 = 4$ 」の式が選ばれる問題であった。後者の文章題について、多くの子どもが $4 \div 8 =$ を選んでいた。何故、そうしたよい結果となったかについては、いくつかの理由が推測できるが、こうした授業でわり算は「大÷小」という暗黙のモデルを解消する可能性が示唆されたと考えられる。

5 年生：小数÷小数の意味理解

4 時間にわたる授業で、小数倍、÷ 小数の意味理解にしっかり取り組んだ。そのポイントは「0.1 倍は、ものさし(基準量)を 10 等分した一つ分のこと」で、この理解は授業において紆余曲折があったけれども、子どもたちに理解されたと考える。それゆえ意味理解の有効な手立てを示唆する授業であった。他方で、そうした意味理解はもちろん重要であるけれども、そこからどのようにして、文章題において、÷ 純小数の立式へと結び付けられるかがなお課題として残された。

6 年生：分数のわり算

「文章題の正しい式を考えるにはどこに貴目して考えればよいか」に正面から取り組んだ授業である。文章題で問われている「求めたい 1 当たりの数量」に着目するという考えは多くの子どもに理解され、習得されたと考えられる。こうした授業を、分数のわり算を一通り終えたところで、わり算のまとめとして扱うのが一つの改善策になると考えられる。それに関わり、本時で出された分数のわり算の文章題の解決で、多くの子どもがベースにしていたのは、「比例の考え」であった。この考えが子どもたちにとってわかりやすく、道具として使えるものであれば、それを体系的に扱うことも検討に値する。

(3-2)わり算概念の授業原理

上記の研究結果を、急進的構成主義、相互作用主義、社会文化主義の 3 つの認識論を統合した多世界パラダイムに基づいて、解釈・検討し、主要な授業原理として以下のものを導き出した。

3 つの主義の統合的活用

3 つの主義は単純化すれば、それぞれ以下のことを認識の基盤においている。

- ・急進的構成主義：学習者個人による構成
- ・相互作用主義：他者との相互作用
- ・社会文化主義：文化の自己化

これらはそれぞれ、授業における自力解決、集団解決、それらを通しての文化の獲得を基礎づけるものである。したがって、授業においては上記の 3 つの主義を統合的に活用することが基盤となる。

意味づくりと道具づくりの相互活用

授業においては、子どもたちによるわり算の意味づくりは重要である。他方で、その意味に基づいて、わり算の文章題を解決するには言葉の式や図などの適切な道具づくりを行い、その有効な活用もまた重要である。その意味づくりと道具づくりとの相互作用により、それぞれを深化させるとともに、両者の有効な活用が可能となる。これまではその相互作用が十分に機能していなかった点が問題であり、その点の改善により、わり算概念の理解が深まり、文章題からの立式がよりよく達成されることになると期待される。

わり算概念への 4 つの道筋

わり算は様々な意味を有し、多様な場面で適用される。したがって、それらに至る道筋は単純ではなく、数多く考えられる。それを整理すると、等分除とその一般化、比例関係の活用、かけ算の逆、包含除の一般化の 4 つに類型化できる。また、これらを併用する道筋もある。さらに、それぞれに長所と短所が存在する。これらを踏まえて、長所を生かし、短所をカバーする指導が求められる。

キーワードへの着目

わり算の文章題には、立式の有効な手掛かりとなるキーワードがいろいろと含まれている。例えば、分数のわり算において「1 分間では何 L の水が入りますか。」とあれば、除数は時間となる。倍に関わるわり算で「青いテープの何倍ですか。」とあれば、青いテープが基準量となる。こうしたキーワードに着目し、その理解を図ることで、正答への道が開かれる。

本研究においては、上記の原理を検証することまではできていない。本研究に関心のある方々とともに、それに取り組むことが今後の課題である。

<引用文献>

国立教育政策研究所教育課程研究センター、全国学力・学習状況調査の 4 年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ - 子どもへの学習指導の改善・充実へ向けて 小学校編 -、2012、教育出版、p. 28

5. 主な発表論文等：

〔雑誌論文〕(計 7 件)

山口武志、影山和也、中原忠男、岡崎正和、前田一誠、等分除とその拡張に関わるわり算概念の調査結果の考察、全国数学教育学

会誌『数学教育学研究』、査読有、23巻1号、2017、pp. 1-20.

岡崎正和、前田一誠、中原忠男、山口武志、影山和也、倍に関わるわり算の位置づけについて - 小学5年から中学1年に対するわり算調査をもとにして、日本数学教育学会第49回『秋期研究大会発表集録』、査読有、49巻、2016、pp. 161-164.

山口武志、中原忠男、小山正孝、岡崎正和、他4名、多世界パラダイムに基づく算数授業の社会的相互作用の規範的モデルの開発研究() - 第4学年「分数」の授業による検証 - 、全国数学教育学会『数学教育学研究』 - 、査読有、20巻2号、2014、pp. 93-112.

〔学会発表〕(計 5件)

岡崎正和、前田一誠、中原忠男、山口武志、影山和也、倍に関わるわり算の位置づけについて - 小学5年から中学1年に対するわり算調査をもとにして、日本数学教育学会第49回秋期研究大会、2016.10.29、弘前大学

山口武志、影山和也、中原忠男、岡崎正和、前田一誠、わり算概念の構成過程に関する理論的・実証的研究 - 等分除とその拡張の理解に関する考察、全国数学教育学会第43回研究発表会、2016.1.30、広島大学

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中原 忠男 (NAKAHARA, Tadao)
広島大学・大学院教育学研究科・名誉教授
研究者番号：90034818

(2) 研究分担者

山口 武志 (YAMAGUCHI Takeshi)
鹿児島大学・教育学部・教授
研究者番号：60239895

岡崎 正和 (OKAZAKI Masakazu)
岡山大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号：40303193

影山 和也 (KAGEYAMA Kazuya)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号：60432283

前田 一誠 (MAEDA Kazushige)

環太平洋大学・次世代教育学部・准教授
研究者番号：90757634