

平成 31 年 4 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287003

研究課題名(和文) 保型形式の周期とL関数の特殊値

研究課題名(英文) Periods of automorphic forms and special values of L-functions

研究代表者

市野 篤史 (Ichino, Atsushi)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40347480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、四元数体上の保型形式の周期を研究した。特に、Jacquet-Langlands対応とよばれる関手性に対し、それを絶対Hodgeサイクルによって具体的に実現することを目指して研究した。また、メタプレクティック群の保型離散スペクトルを研究した。特に、古典群に対するArthur分類と志村、Waldspurgerによる重さ半整数保型形式の理論を一般化することを目指して研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Jacquet-Langlands対応の絶対Hodgeサイクルによる具体的な実現に向けて、大きな成果を上げることができた。この成果は30年以上の間停滞していた分野に著しい進展をもたらす、学術的意義の高いものである。またメタプレクティック群の保型離散スペクトルについて、緩増加部分を精密に記述することに成功した。この成果は、重さ半整数保型形式の理論を一新するものである。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have studied periods of automorphic forms on quaternion algebras. In particular, we aimed at an explicit realization of the functoriality called the Jacquet-Langlands correspondence in terms of absolute Hodge cycles.

Also, we have studied the automorphic discrete spectrum of metaplectic groups. In particular, we aimed at a generalization of the Arthur classification for classical groups and the theory of half-integral weight modular forms by Shimura and Waldspurger.

研究分野：数論

キーワード：周期 保型表現 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

2008年頃から Kartik Prasanna と共同で、四元数体上の保型形式の周期の研究を行っていた。多くの知見が蓄積され、研究は順調に遂行されていたものの、決定的な結果は達成されていない状況だった。また、以前から Wee Teck Gan と共同で、幅広くテータ対応の研究を行っていた。特に、研究開始当初は局所テータ対応と局所 Gross-Prasad 予想の関係について研究していたが、これは完了に近づいていたため、新たな方向性を模索していた。

2. 研究の目的

本研究は、解析的に定義される保型形式の周期と呼ばれる複素数と、数論的不変量である L 関数の特殊値の結びつきを明らかにする。また、大域的な対象である保型形式の周期の局所的な類似として p 進簡約群の表現の不変量を考え、これと数論的不変量の間関係を解明する。

3. 研究の方法

四元数体上の保型形式の周期に関しては、テータ対応を研究手法として用いる方法があり、この手法によって Harris-Kudla と Prasanna は (整) 周期関係式を証明した。本研究においても、この関係式の精密化をはじめとした周期のより深い理解のために、Kartik Prasanna との共同研究ではテータ対応の理論を深化させる方法をとった。これは、Wee Teck Gan と共同で行ったテータ対応の研究と直接の関係はないが、技術的には共通部分が多かったため、両者を並行する形で研究を行った。

4. 研究成果

(1) Kartik Prasanna と共同で、四元数体上の保型形式の周期、特に Jacquet-Langlands 対応と絶対 Hodge サイクルの研究を行った。Tate 予想によると、Jacquet-Langlands 対応は対応する四元数志村多様体の積上のサイクルにより実現されるはずである。このサイクルの構成は非常に難しいため、対応する絶対 Hodge サイクルの構成を目標として研究を行った。鍵となるのは四元数体上の歪エルミート形式を用いた定式化である。この設定を用いると、所望の Hodge サイクルは 3 次歪エルミート形式に対する四元数ユニタリ群に対応する志村多様体上の Hodge サイクルを制限することで得ることができる。この志村多様体上の Hodge サイクルを、テータ対応、Kudla-Milson による調和形式と、ユニタリ群の保型離散スペクトルの分類を使って構成した。さらにアーベル型志村多様体に関する Kisin-Shin-Zhu の結果を使うことで、この Hodge サイクルが Tate サイクルであることも明らかになった。

(2) Wee Teck Gan と共同で、メタプレクティック群の保型離散スペクトルの研究を行った。これは、1973年に志村五郎によって発見され、1980年代に Waldspurger によって発展した、重さ半整数保型形式の理論(志村・Waldspurger 対応)の高次元化に相当する。本研究では、奇数次特殊直交群に対する Arthur 分類と、Jian-Shu Li による保型 L 関数の中心値が寄与しない大域テータ対応に関する研究を巧みに使うことで、メタプレクティック群の保型表現の近同値類に対し、その Arthur パラメータを定義し、さらに Arthur パラメータが緩増加という仮定のもとで、対応する近同値類の既約分解をイプシロン関数を使って記述した。技術的には、ふたつの局所テータ対応(安定領域のものと同階数のもの)の整合性を示す必要があり、そのために以前の研究で開発した大域的手法を改良した。さらに、この大域的手法を適用するためには、標準加群とは限らないある種の誘導表現の既約性が必要であった。実数体の場合はこの既約性が知られていなかったため、Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを比較することで、内視群の標準加群の既約性に帰着して証明した。

(3) Wee Teck Gan と共同で、局所 Gan-Gross-Prasad 予想とテータ対応に関する Prasad 予想の研究を行った。局所 Gan-Gross-Prasad 予想とは、ユニタリ群の表現をその部分ユニタリ群に制限したときの分岐則を、数論的不変量であるイプシロン関数を使って記述する予想である。一方、局所テータ対応とは、極小表現の分岐則を用いた古典群の表現の構成であり、この対応も数論的不変量を使って具体的に記述されると Prasad により予想されている。これらの予想は局所 Gan-Gross-Prasad 予想 2 つ、局所テータ対応に関する予想 2 つの、計 4 つの予想からなり、Beuzart-Plessis によって局所 Gan-Gross-Prasad 予想が 1 つ証明されていた。本研究では、局所 Gan-Gross-Prasad 予想と局所テータ対応に関する予想の関係を看破し、さらに局所テータ対応に関する予想を 1 つ証明することで、4 つの予想の証明を完了させた。技術的には、Arthur の重複度公式を使った大域的手法を開発したことが、証明の成功を導いた。

(4) Erez Lapid、Zhengyu Mao と共同で、形式次数予想の研究を行った。形式次数予想は、Weyl 次元公式を数論的に解釈したものであり、表現論的不変量である形式次数を、数論的不変量であるガンマ因子を使って表す予想である。さらに、より繊細な不変量であるエンドスコピーを

通して、表現論と数論が強く結びついていることを主張している。本研究では、 p 進体上の奇数次特殊直交群の離散系表現に関する形式次数予想を、肯定的に解決した。技術的には、保型表現の理論における降下法とよばれる表現の構成を使う。まず、メタプレクティック群の生成的二乗可積分表現に対し、降下法と Lapid-Mao による行列係数の Whittaker 係数の分解公式を使って、この場合に形式次数予想を証明する。次に形式次数予想と局所テータ対応の関係から、奇数次特殊直交群の生成的二乗可積分表現の場合を導き、さらに局所 L パケットの性質を使って一般の場合を証明した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

(1) Atsushi Ichino, Kartik Prasanna, Periods of quaternionic Shimura varieties. I, *Memoirs of the American Mathematical Society*, to appear. 査読有

(2) Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, On the irreducibility of some induced representations of real reductive Lie groups, *Tunisian Journal of Mathematics* 1 (2019), no. 1, 73-107. DOI:10.2140/tunis.2019.1.73 査読有

(3) Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, The Shimura-Waldspurger correspondence for Mp_{2n} , *Annals of Mathematics* 188 (2018), no. 3, 965-1016. DOI:10.4007/annals.2018.188.3.5 査読有

(4) Atsushi Ichino, Erez Lapid, Zhengyu Mao, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, *Duke Mathematical Journal* 166 (2017), no. 7, 1301-1348. DOI:10.1215/00127094-0000001X 査読有

(5) Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, *Inventiones Mathematicae* 206 (2016), no. 3, 705-799. DOI:10.1007/s00222-016-0662-8 査読有

〔学会発表〕(計 19 件)

(1) Atsushi Ichino, Langlands functoriality and algebraic cycles, Colloquium, Shanghai Jiaotong University, 2019 年 3 月 30 日

(2) Atsushi Ichino, The automorphic discrete spectrum of $Mp(4)$, Shanghai Jiaotong University, 2019 年 3 月 29 日

(3) Atsushi Ichino, Hodge classes and the Jacquet-Langlands correspondence, Workshop on L-functions, Langlands functoriality and Trace formula, including relative aspects, Porquerolles, France, 2018 年 9 月 4 日

(4) Atsushi Ichino, Hodge classes and the Jacquet-Langlands correspondence, Simons Symposium, Relative Trace Formulas, Schloss Elmau, Krun, Germany, 2018 年 4 月 26 日

(5) Atsushi Ichino, 保型形式と分岐則, 表現論シンポジウム, 石和, 2017 年 11 月 30 日

(6) Atsushi Ichino, Hodge classes and the Jacquet-Langlands correspondence, Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics, 大阪市立大学, 2017 年 9 月 20 日

(7) Atsushi Ichino, The Shimura-Waldspurger correspondence for $Mp(2n)$, New directions in automorphic forms and L-functions, University of Prishtina, Republic of Kosovo, 2017 年 7 月 3 日

(8) Atsushi Ichino, The automorphic discrete spectrum of $Mp(2n)$, Relative Trace Formula, Periods, L-Functions and Harmonic Analysis, CIRM, 2016 年 5 月 26 日

(9) Atsushi Ichino, The automorphic discrete spectrum of $Mp(2n)$, New Developments in Representation Theory, National University of Singapore, 2016 年 3 月 17 日

(10) Atsushi Ichino, The automorphic discrete spectrum for $Mp(2n)$, Conference on Algebraic Number Theory, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, 2016 年 1 月

22 日

(11) Atsushi Ichino, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, Group Theory/Lie Theory/Number Theory Seminar, University of Michigan, 2015 年 11 月 2 日

(12) Atsushi Ichino, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, Workshop on Automorphic Forms and Representations, University of Rijeka, 2015 年 9 月 23 日

(13) Atsushi Ichino, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, 1st Nisyros Conference, On Automorphic Representations & Related Topics, Nisyros island, Greece, 2015 年 7 月 13 日

(14) Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, 整数論 & 保型形式セミナー, 大阪大学, 2015 年 6 月 19 日

(15) Atsushi Ichino, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, Arithmetic and Automorphic Forms Seminar, Columbia University, 2015 年 2 月 9 日

(16) Atsushi Ichino, On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups, Joint IAS/Princeton University Number Theory Seminar, Institute for Advanced Study, 2015 年 2 月 5 日

(17) Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, 東京大学, 2015 年 1 月 30 日

(18) Atsushi Ichino, Representation theory and arithmetic invariants, MSRI Evans Talk, University of California, Berkeley, 2014 年 10 月 27 日

(19) Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Gan-Gross-Prasad, Paris, 2014 年 6 月 23, 24 日

〔その他〕

ホームページ

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichino/>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：池田 保

ローマ字氏名：IKEDA, Tamotsu

所属研究機関名：京都大学

部局名：大学院理学研究科

職名：教授

研究者番号（8桁）：20211716

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。