

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26287009

研究課題名(和文)非線形現象に現れる特異性の幾何学的研究

研究課題名(英文)Geometric studies on singularity of non-linear phenomena

研究代表者

泉屋 周一 (Izumiya, Shyuichi)

北海道大学・理学研究院・特任教授

研究者番号：80127422

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円

研究成果の概要(和文)：当研究では、ラグランジュ部分多様体芽の間のラグランジュ同値と対応するグラフ型波面のある種の幾何学的同値関係が同じものである事を示した。その結果、ラグランジュ特異点論の様々な応用が見つかった。例えば、古典的微分幾何学への応用、双曲幾何学への応用、時空の幾何学への応用等の他に特異点を持つ曲面や写像の微分幾何学的研究への応用が含まれる。これらとは別に、この研究を通して、特異点論の量子力学への応用が新たに発見され、現在発展中である。

研究成果の概要(英文)：In this research project we have shown that Lagrangian equivalence among Lagrangian submanifold germs and a certain equivalence relation among the corresponding graph-like wave fronts are the same. Applications of this result include the classical differential geometry, the geometry of the space-time, the differential geometry of singular surfaces and mappings, and so on. On the other hand, a new application of singularity theory to quantum mechanics is also discovered in this research project.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：非線形現象 特異性 幾何学 ラグランジュ特異点 ルジャンドル特異点

1. 研究開始当初の背景

現代幾何学の主要な分野として、位相幾何学、微分幾何学、代数幾何学があるが特異点論はこれらすべての幾何学と深く関係している。例えば、モース理論、はめ込みと埋め込みの理論、広中の特異点解消理論等であるが、それらは現代においては様々な応用へと昇華されつつある。また、人類は古来より、特異的な現象に注目して来たと言える。例えば、微積分では、その臨界点(特異点)に注目することにより関数の形状がわかる事が認識され、ガウスの微分幾何学でもその事実が本質的に用いられた。また多くの物理法則は最小作用の原理というある種の関数の臨界点として捉えられている。古典的微分幾何学への特異点論の応用と100年以上経った相対性理論への応用、衝撃波の解析、画像処理理論への応用などが、ようやく可能な段階に到達してきたのが研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

当研究は特異点論の中でも「微分可能写像の特異点論」を応用することにより、部分多様体や特異点を許容する図形の微分幾何学、変分問題に現れるウルフ型、非線形偏微分方程式系の解の衝撃波、社会科学における社会選択問題と超平面配置、制御系理論、プレーン宇宙論、4次元多様体論への応用やそれまでに知られていなかった分野への応用を目指して、既存の特異点論の成果の応用と、特異点論自体の基礎的部分の深化発展を目的とした。

3. 研究の方法

研究分担者のグループ(a)と連携研究者のグループ(b)の2つのグループに分け、各グループは個別に研究を深化させると同時にグループ間の有機的な討論や共同研究を通して全体の研究を推進した。具体的にはグループ(a)は主として、特異点論において応用が知られている分野への応用を研究し、さらにグループ(b)からアドバイスされた問題について特異点論の立場から既存の理論を応用可能なものは応用し、問題点を整理してグループ(b)へフィードバックすることを行った。グループ(b)は主として、微分幾何学、位相幾何学、シンプレクティック・接触幾何学、幾何学的測度論、偏微分方程式論において問題の発掘と整備を行いアドバイスをを行った。これらの役割分担の下で、研究代表者の指針において各グループで得られた問題点や結果を研究会や研究打ち合わせ等を通して研究を推進した。理論系の分野である数学の主たる研究方法は、実際の面談による、研究打ち合わせである。この場合、研究打ち合わせと言っても、準備のための打ち合わせではなく、実際に踏み込んだ計算や証明が行われるために、一回の訪問や招聘が最低1週間~3週間に及ぶ。そのため、決算では、全体的に旅費の占める率が高くなっている。これらの方法を実施するために、

連携研究者のみならず国内外の専門家の招聘や訪問が主となった。

4. 研究成果

初年度の研究成果として、研究代表者が20年来考えていた「ラグランジュ特異点のラグランジュ同値と対応するグラフ型波面の同値関係が同じである」事を証明した。従来ラグランジュ同値の方が強い同値関係であるということを示して来たが、逆が成り立つ事は研究を開始して以来20年間にわたって成り立たないであろうと思い込んでいたが、実は逆もなんの仮定なしで成り立つ事が簡単にわかり、従来の様々な証明を省略する事ができた。さらにはグラフ型波面の方が幾何学的意味が明確で、様々な幾何学的結論が簡単に導き出される事がわかった。一つの例として、ラグランジュ特異点の像である焦点集合の微分同相は必ずしもラグランジュ同値を導かないが、その幾何学的理由がこの結果から明らかにされた。とくにグラフ型波面を考える事の利点は、「世界面の焦点集合」と呼ばれる、時空内に現れる焦点集合を研究するための枠組みを与えることがわかり、その結果「世界面の焦点集合」もある種のラグランジュ特異点の像として理解される事がわかった。また、グラフ型波面に対しては様々な同値関係が考えられるが、それらの同値関係とラグランジュ同値との強弱関係などが、この成果を通して理解可能となり、焦点集合の特異点に関する幾何学的性質の研究におおきな進展が見込まれる。分担者である石川剛郎は G_2 型リー群に関連した幾何学に対応するある種の接線曲面の特異点について研究を推進した。また寺尾宏明は超平面配置に関する研究を推進し、佐治健太郎、高橋雅朋は代表者と共にバレンシア大学(スペイン)を訪問し、Romero Fuster 教授と双曲空間内のカスプ辺と言う特異点を持つ曲面の微分幾何学に関する研究を開始した。平成27年度には、研究代表者は前年度に得られたラグランジュ特異点とグラフ型波面に関する結果をもとにして、グラフ型波面に対するより弱い同値関係の研究を推進した。その結果、1974年頃に Wassermann と Janich が関数の右左同値という概念を用いたラグランジュ特異点論に関する結果の幾何学的意味を解釈する事に成功した。彼らの同値関係はラグランジュ同値より弱い同値関係で、対応するシンプレクティック幾何学的な意味付けが出来ないので、長らく放置されてきた結果であるが、その幾何学的意味をグラフ型波面に対する接触幾何学的意味を持つ同値関係で特徴付ける事に成功した。また分担者である佐治健太郎と東京学芸大学の竹内伸子との共同でカスプ辺と呼ばれる特異点を持つ曲面に Darboux 稜と呼ばれる動標構を導入する事により、その微分幾何学的性質を研究した。この方法によれば、近年カスプ辺の標準形と呼ばれるものを用いて導入され

た3種類の基本的不変量が古典的微分幾何学の方法のみによって定めることができ、その事実から特殊な幾何学的性質をもつカスプ辺の特徴付けなどの様々な結果が得られた。また、北海道大学電子科学研究所の寺本央の申し出により、スピントロニクスと呼ばれる10年ほど前から始まった物質科学の一分野への応用を開始した。これらの研究成果やその他様々な特異点論と幾何学の成果を発表する場として、平成27年6月には神戸大学と京都大学において国際研究集会を主催して、その補助として当科学研究費を使用した。

平成28年度は、前年度に開始したスピントロニクス及び光化学反応制御理論への応用を推進した。その結果「バルクエッジ対応」と関連する研究が進展出来そうな事が次第に明らかになってきた。バルクエッジ対応が現れる場面では、量子力学的ハミルトニアン固有値としてのエネルギー関数が交差する事が知られている。さらにそのような点では、一般にエネルギー関数は微分可能ではなくなることも知られている。このような点をバンド交差点とよび、良く現れる場合が質量を持たないフェルミ粒子の場合であり、この場合はデラック錐と呼ばれる。しかし、物質に圧力や電場、熱など加えるとこの状況が分岐する。代表者と寺本央、及び他の共同研究者はこのエネルギー関数の交差とグラフの形状を保存する同値関係をパラメータに依存する量子力学的ハミルトニアンの集合に導入し、ある分類結果を得た。さらに東京学芸大の竹内伸子とともに、空間内の垂足曲線の反転操作との関連を調べる研究に着手した。また、ツバメの尾と言う特異点を持つ曲面やより一般の特異点を持つ曲面の微分幾何学関性質について、分担者の佐治健太郎と推進した。これらの研究成果やその他の様々な特異点論と幾何学の成果を発表する場として、平成28年6月に、青山大学で、12月に京都大学数理解析研究所で開催された研究集会で成果発表を行い、さらにワルシャワ工科大学(ポーランド)とバレンシア大学(スペイン)を研究打ち合わせの為に訪問した。

最終年度である平成29年度は引き続き、スピントロニクスや光化学反応制御理論への応用を見越した、パラメータに依存する量子力学的ハミルトニアンの分類理論を推進した。特に Tougeron が40年ほど前に導入したG-同値を含むより一般的な枠組みにおける分類理論の構成を試みた。その結果、この一般的な枠組みには微分幾何学におけるG-構造に対応した特異性を許容する曲面や写像の幾何学的な分類を含む枠組みである事がわかり、その観点からも重要なものである事が認識され、基礎的な構成をほぼ完成した。また、物理学的に重要な対称性を持つ場合の分類理論も構成中である。一方、分担者の佐治健太郎、高橋雅朋と代表者はバレンシア大

学を訪問し、双曲空間内におけるカスプ辺を持つ曲面の微分幾何学の研究を推進した。さらには4次元ミンコフスキー時空内の特異点をもつ曲面の微分幾何学について Romero Fuster 教授と共同研究を開始した。また、東京学芸大学の竹内伸子とは引き続き高次元空間内の垂足部分集合の反転操作との関係やその特異性及び類似の概念に着いて考察した。その研究成果については、メキシコ国立自治大学(メキシコ)で開催された特異点論と微分幾何学に関する研究集会で発表した。その他、共同研究を推進するためにワルシャワ工科大学(ポーランド)を訪問した。

5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計17件)

1 Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to directed curves, Topology and its Applications, 査読有, 234, 2018, 198—208
DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.018

2 J. L. Deolindo-Silva, Y. Kabata, T. Ohmoto, Binary differential equations at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces, Topology and its Applications, 査読有, 234, 2018, 457—473
DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.014

3 Luciana Martins, Kentaro Saji, Geomtry of cuspidal edges with boundary, Topology and its Applications, 査読有, 234, 2018, 209—219
DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.024

4 Hiroshi Teramoto, Kenji Kondo, Shyuichi Izumiya, Mikito Toda, Tamiki Komatsuzaki, Classification of Hamiltonian in neighbourhoods of band crossings in terms of the theory of singularities, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 58, 2017, 073502-1—073502-31,
DOI: 10.1063/1.4991662

5 Tomonori Fukudanaga, Masatomo Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves, Journal of Geomtry, 査読有, 108, 2017, 763—774
DOI: 10.1007/s00022-017-0371-5

6 Shyuichi Izumiya, Kentaro Saji, Nobuko Takeuchi, Flat surfaces along cuspidal edges, Journal of Singularity, 査読有, 16, 2017, 73—100
DOI: 10.5427/jsing.2017.16c

7 Noriaki Ito, Shyuichi Izumiya, Lorentzian Darboux images of curves in Minkowski 3-space, Int. J. Geom. Methods Mod. Phy., 査読有, 13, 2016, 1650066-1—1650066-19
DOI: 10.1142/S0219887816500663

8 Shyuichi Izumiya, Geometric

interpretation of Lagrangian equivalence, *Canad. Math. Bull.*, 査読有, 59, 2016, 806—812

DOI: 10.4153/CMB-2016-056-2

9 Toru Ohmoto, Singularities of maps and characteristic classes, *Adv. Stud. Pure Math.*, 査読有, 68, 2016, 191—265

<http://mathsoc.jp/publication/ASPM/contents/CFM68.pdf>

10 Goo Ishikawa, Yosinori Machida, Masatomo Takahashi, Singularities of tangent surfaces in Cartan's split G_2 geometry, *Asian J. Math.*, 査読有, 20, 2016, 353—382

DOI: 10.4310/AJM.2016v20.n2.a6

11 Shun'ichi Honda, Masatomo Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.*, 査読有, 16, 2016, 265—276

DOI: 10.1515/advgeom-2015-0035

12 T. Abe, M. B. Michaek, T. Hoge, H. Terao, The freedness of ideal subarrangements of Weyl arrangements, *J. Eur. Math. Soc.*, 査読有, 18, 2016, 1339—1348

DOI: 10.4171/JEMS/615

13 Shyuichi Izumiya, Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in anti-de Sitter space, *J. of Math. Phys.*, 査読有, 56, 2015, 112502-1—112502-29

DOI: 10.1063/1.4936148

14 K. Saji, H. Yildirim, Legendrian dual surfaces in hyperbolic 3-space, *Ann. Polon. Math.*, 査読有, 115, 2015, 241—261

DOI: 10.4064/ap115-3-4

15 Takuro Abe, Hiroaki Terao, Simple root bases for Shi arrangements, *Journal of Algebra*, 査読有, 422, 2015, 89—104

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.09.011

16 Tomonori Fukunaga, Masatomo Takahashi, Evolutes of fronts in the Euclidean plane, *Journal of Singularity*, 査読有, 10, 2014, 92—107

DOI: 10.5427/jsing.2014.10f

17 Shyuichi Izumiya, Takami Sato, Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in de Sitter space, *Journal of Singularity*, 査読有, 10, 2014, 157—173

DOI: 105427/jsing2014.10j

〔学会発表〕(計 8 件)

1 Shyuichi Izumiya, G-structures and singularities of map-germs, *Singularities in Generic Geometry and its applications: Valencia V, Mexico City (Mexico)*, 2017

2 泉屋 周一, 3次元ユークリッド空間内の垂足曲面(曲線)特異点の幾何学的側面, *神戸大学(兵庫県神戸市)*, 2016年9月2日

3 泉屋 周一, コースティックスと関数芽のA-同値、トポロジー・特異点論とその応用, *青山学院大学(神奈川県相模原市)*, 2016年6月2日

4 Goo Ishikawa, Leibniz complexity of Nash functions on differentiations, *Geometric Singularity Theory, Polish-Japanese Singularity Theory Working days, Warsaw (Poland)*, 2015年9月9日

5 Hiroaki Terao, Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtration of Affine Weyl Arrangement, *Computational Geometric Topology in Arrangement Theory, Province (USA)*, 2015年6月10日

6 Shyuichi Izumiya, Caustics of world sheets in Lorenz-Minkowski 3-space, *Real Singularity and Applications, CIRM-Luminy (France)*, 2015年2月17日

7 Goo Ishikawa, Affine connections and singularities of tangent surfaces to space curves, *Singularity theory of differential maps and its applications*, *京都大学数理解析研究所(京都市)*, 2014年12月6日

8 Shyuichi Izumiya, The theory of wave front propagations and its applications, *School of Singularity Theory, USP, Sao Paulo University (Brazil)*, 2014年8月4日

〔図書〕(計 2 件)

1 泉屋 周一, 共立出版、波面の伝播と特異点, 2018, 264

2 S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. Soares Ruas, F. Tari, *World Scientific, Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, 2016, 368

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/izumiya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA Shyuichi)

北海道大学・大学院理学研究院・特任教授
研究者番号: 80127422

(2) 研究分担者

大本 亨 (OHOMOTO Toru)

北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 20264400

石川 剛郎 (ISHIKAWA Goo)

北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 50176161

佐治 健太郎 (SAJI Kentaro)
神戸大学・理学研究科・准教授
研究者番号：70451432

高橋 雅朋 (TAKAHASHI Masatomo)
室蘭工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号：80431302

寺尾 宏明 (TERAO Hiroaki)
北海道大学・国際本部・特任教授
研究者番号：90119058

(3)連携研究者

利根川 吉廣 (TONEGAWA Yoshihiro)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：80296748

小野 薫 (ONO Kaoru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：20204232

梅原 雅串 (UMEHARA Masaki)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90193945

小池 茂昭 (KOIKE Shigeaki)
東北大学・理学研究科・教授
研究者番号：90205295