

令和元年5月22日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287011

研究課題名(和文)代数的特異点の大域的研究

研究課題名(英文)Research on global properties of algebraic singularities

研究代表者

小池 敏司 (Koike, Satoshi)

兵庫教育大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：60161832

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,800,000円

研究成果の概要(和文)：ナッシュ集合やナッシュ写像は、実代数幾何学における非常に重要な研究対象である。本研究では、それらの特異点に対して大域的研究を行い、次に述べる結果を得た。ナッシュ曲面族に対して、ナッシュ曲面の主部についてはブローナッシュ自明となるブロー半代数的自明性に関する有限性定理を示した。また、ナッシュ曲面からナッシュ多様体へのナッシュ写像族の半代数的タイプについて、ナッシュ曲面が孤立特異点を許す場合には有限性の成立を、非孤立特異点を許す場合には位相モジュライが現れる多項式写像族の構成を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

まず、最初の研究成果の学術的意義を述べる。以前の研究で、2次元ナッシュ集合族のブロー半代数的自明性に関する有限性定理を示していたが、これをナッシュ曲面の主部上ではブローナッシュ自明となるブロー半代数的自明性に関する有限性定理に向上し、3次元の場合のブローナッシュモジュライの出現が、2次元の場合には起こり得ないことを明らかにした。次に、二つ目の成果の学術的意義を述べる。特異点論の一般的常識では、定義域が2次元のナッシュ写像族に現れる半代数的タイプは有限で、3次元以上では位相モジュライが出現する。しかし、定義域が2次元の場合であっても、それが特異である場合には異なる結果になることを示した。

研究成果の概要(英文)：Nash sets and Nash mappings are very important research objects in Real Algebraic Geometry. In this research we studied global properties of those singularities, and have obtained the following results.

We proved a finiteness theorem for Blow-Nash triviality of a family of main parts of Nash surfaces in a Nash manifold which is extendable to a Blow-semialgebraic triviality of a family of Nash surfaces as embedded Nash sets. For a family of Nash mappings from a Nash surface to a Nash manifold, we proved that the number of semialgebraic types of Nash mappings is finite if the Nash surface admits only isolated singularities, and constructed a family of polynomial mappings from an algebraic surface with non-isolated singularities to the 4-dimensional Euclidean space in which topological moduli appear.

研究分野：特異点論

キーワード：ナッシュ曲面 ブローナッシュ自明性 半代数的同値 特異点解消 同程度特異性 接方向的横断性  
ナッシュ構造安定 相対ジェットの十分性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

複素代数的特異点族の同程度特異性問題の研究は非常に長い歴史を持っており、代数幾何学者や複素特異点研究者により、局所的にも大域的にも多くの優れた研究がなされて来ていた。一方、実代数的特異点族の同程度特異性問題については、局所的な研究は少なからずあったが、大域的な研究は非常に少なかった。このような状況のもと、研究代表者の小池敏司は実代数的集合族に対する大域的同程度特異性問題に関して、次のような結果を得ていた。

(1 - 1) 実代数的集合族の同時特異点解消の存在に関する有限性定理

(1 - 2) 各実代数的集合が孤立特異点を持つ時のブローナッシュ自明性に関する有限性定理

(1 - 3) 各2次元実代数的集合が非孤立特異点を持つ時のブロー半代数的自明性に関する有限性定理

(1 - 4) 各3次元実代数的集合が非孤立特異点を持つ時のブロー半代数的自明性に関する有限性定理

一方、本研究分担者の福井敏純氏により、次の考察がなされていた。

(1 - 5) 4次元実代数的集合族で、標準的な特異点解消のもとブロー位相モジュライが現れる例を構成できる。

ここでいう実代数的集合とは、非特異実代数多様体上で定義された多項式写像の零点集合だけでなく、特に断らなければ、より広いナッシュ多様体上で定義されたナッシュ写像の零点集合であるナッシュ集合を指す。ナッシュ多様体とは半代数的集合である解析多様体のことであり、ナッシュ写像とはグラフが半代数的集合である解析写像のことである。ナッシュとは多項式を含むもののなかで陰関数定理等のいい性質が成り立つ最少のカテゴリーで、実代数幾何学の分野では最も重要な研究対象である。本研究分担者の塩田昌弘氏は、幾何学的ナッシュ多様体論の第一人者であった。

一方、コンパクト可微分多様体からコンパクト可微分多様体への安定写像は、微分同相という意味で、コンパクト非特異実代数多様体からコンパクト非特異実代数多様体へのナッシュ写像の特別な場合と見なすことができる。このことから、実代数的特異点の研究を安定写像の研究に応用することや、ナッシュ多様体間のナッシュ安定写像を研究することも重要になるが、この方面の研究もほとんどなされていない状況であった。

最初の実代数的特異点族の同程度特異性問題は代数幾何学の問題意識に由来するものであるが、ナッシュ安定写像の研究は微分位相幾何学の問題意識に由来するものである。

### 2. 研究の目的

本研究で目的にしていたことは2つであった。第一の目的は実代数的集合族の特異点の族の大域的同程度特異性問題について、1. で述べた結果(1 - 1) - (1 - 5)をより精密化・明確化することであり、その過程で関連する特異点論の研究分野も前進させることであった。

第2の目的は、最初の目的で得られた結果や手法を実代数的特異点の安定写像の研究に応用することや、ナッシュ多様体間のナッシュ安定写像そのものを研究することであった。

### 3. 研究の方法

実代数的集合族に対する大域的同程度特異性問題に関して、ブローナッシュ自明性やブロー半代数的自明性の概念を導入し、それらに関する有限性問題の研究を始めたのは、広中先生や E. Bierstone - P. Milman によるナッシュ・カテゴリーにおける特異点解消定理の証明、分担者の塩田昌弘氏による幾何学的ナッシュ多様体論の構築、研究協力者の Tzee-Char Kuo 氏による実解析的特異点族に対する局所的なブロー解析理論の確立に触発されたことによる。本研究を進める上で役立てた方法は、広中先生達の強い意味での特異点解消が持ついい性質、ブロー解析理論を確立する上で用いられた種々のアイデア、塩田氏の幾何学的ナッシュ多様体論を含む実代数幾何学全般の手法や結果などである。そのため、この研究を進めるにあたっては、塩田氏からナッシュ多様体やナッシュ写像に関する諸性質に関する専門的知識の提供を受けたり、共同研究を行った箇所もある。また、研究協力者の P. Milman 氏からは彼等の特異点解消の持つ性質、Kuo 氏からはブロー解析理論に関する専門的知識の提供を受けた。

可微分多様体間の可微分写像の可微分構造安定性は、Thom - Mather の理論と呼ばれる。R. Thom が提出した大枠をもとに、J. N. Mather が一連の6編の論文で完全決着をつけたからである。実代数的特異点に対する代数的なクラスでの構造安定性を研究するにあたって用いた方法は、上記の Mather の仕事のアイデアや結果、塩田氏の幾何学的ナッシュ多様体論、微分位相幾何学などの手法や結果などである。

### 4. 研究成果

(1) 分担者の塩田氏との共同研究において、「特異点を許す2次元ナッシュ曲面から一般次元のナッシュ多様体へのナッシュ写像族に現れる半代数的タイプの有限性問題」に対して、定義域のナッシュ曲面が孤立特異点を許す場合は有限性が成り立つことを示し、非孤立特異点を許す場合には位相モジュライが現れる多項式写像族を構成して有限性が成り立たないことを示した(雑誌論文4)。

(2) 考察(1 - 5)により、(1 - 4)の有限性定理は望ましいものであることがわかる。 一

方、(1 - 5) の議論を精密化することにより、3次元実代数的集合族で標準的な特異点解消のもとブローナッシュモジュライが現れる例を構成することができることを示した。このことにより、(1 - 3) の結果は強められることが望まれる。この問題に対し、各2次元実代数的集合が非孤立特異点を持つ場合において、各代数的集合の主部に対してはブローナッシュ自明となるブロー半代数的自明性に関する有限性定理に向上し、2次元実代数的集合族にはブローナッシュモジュライが現れないことを明らかにした(引用文献<sup>2)</sup>)。

(3) 研究協力者の L. Paunescu 氏との共同研究において、任意の二つの特異集合の交点における接方向的集合を用いた局所横断性の概念を大域化し、複素代数的集合に応用することにより、次のタイプの接方向的横断性リプシッツ保存定理を示した：リプシッツ同相な複素代数的集合の標準的層化集合はそのリプシッツ同相写像によって写り合うが、任意の特異集合と標準的層化集合の大域的な接方向的横断性はそのリプシッツ同相写像で保存される(雑誌論文<sup>1)</sup>)。

(4) 解析的特異点の不変量は代数的特異点の不変量にもなっていることから、本研究に関連して解析関数のレベル集合に対する曲率集中化問題の研究も行った。この研究は、研究協力者の T.-C. Kuo 氏と L. Paunescu 氏との3人で行っているもので、レベル集合の曲率集中化、即ち、レベル集合に A' Campo 隆起が起こる場所を Newton-Puiseux 無限小と勾配キャニオンを用いて特定した(雑誌論文<sup>14)</sup>)。

(5) 構造安定性に関する Thom-Mather 理論によれば、可微分構造安定写像は可微分写像空間のなかで常に開かつ稠密になっている訳ではなく、結構次元(nice dimension)と呼ばれる次元の対の領域に対してのみ成り立つ。本研究では、ナッシュ構造安定性の結構次元におけるナッシュ写像に対しては、可微分構造安定であることとナッシュ構造安定であることは同値であることを示した(引用文献<sup>3)</sup>)。

(6) 可微分写像の構造安定性の問題を考えるとき重要になるものの一つに、「ジェットの十分性」という概念がある。研究協力者の Karim Bekka 氏との共同研究において、与えられた閉集合に付随する相対ジェットの位相十分性と V 十分性のロジャシェビッチ不等式を用いる特徴付けを与えた。また、この結果を用いて、相対的でない通常のジェットでは同値になる関数の位相十分性と V 十分性が、相対ジェットに対しては同値にならない例を構成した(引用文献<sup>1)</sup>)。

<引用論文>(5 . の[雑誌論文]にない論文)

- 1 [Karim Bekka](#) and [Satoshi Koike](#), Characterisations of V-sufficiency and  $C^0$  sufficiency of relative jets, arXiv.1703.07069
- 2 [Satoshi Koike](#), Finiteness theorem for blow-Nash triviality of a family of Nash surfaces, preprint
- 3 [Satoshi Koike](#), Structural stability in the space of Nash mappings, preprint

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 18 件)

- 1 [Satoshi Koike](#) and [Laurentiu Paunescu](#), Global directional properties of singular spaces, *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliques*, 査読有, 2019 (印刷中)
- 2 [Campeato Jean-Baptiste](#), [Toshizumi Fukui](#), [Krzysztof Kurdyka](#) and [Adam Parusinski](#), Arc spaces, motivic measure and Lipschitz geometry of real algebraic sets, *Mathematische Annalen*, 査読有, 2019  
DOI: 10.1007/s00208-019-01805-8
- 3 [Satoshi Koike](#) and [Laurentiu Paunescu](#), Applications of the sequence selection property to bi-Lipschitz geometry, *European Journal of Mathematics*, 査読有, published online: 27 September 2018  
DOI: 10.1007/s40879-018-0291-4
- 4 [Satoshi Koike](#) and [Masahiro Shiota](#), Finiteness of semialgebraic types of Nash mappings defined on a Nash surface, *Mathematische Zeitschrift*, 査読有, published online: 31 July 2018  
DOI: 10.1007/s00209-018-2104-3
- 5 [Goulwen Fichou](#) and [Masahiro Shiota](#), Real Milnor fibres and Puiseux series, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 査読有, 50 (2017), 1205—1240
- 6 [Carles Bivia-Ausina](#) and [Toshizumi Fukui](#), Invariants for bi-Lipschitz equivalence of ideals, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 査読有, 68 (2017), 791—815
- 7 [Toshizumi Fukui](#), [Masaru Hasegawa](#) and [Kouichi Nakagawa](#), Contact of a regular surface in Euclidean 3-space with cylinders and cubic binary differential equations, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 査読有, 69 (2017), 819—847
- 8 [Toshizumi Fukui](#), Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities, *Saitama Mathematical Journal*, 査読有, 31 (2017), 79—88

- 9 Fichou Goulwen, Ronan Quarez and Masahiro Shiota, Artin approximation compatible with a change of variables, Canadian Mathematical Bulletin, 査読有, 59 (2016), 760—768
- 10 Toshizumi Fukui and Donghe Pei, Curvature for curves in semi-Euclidean space, Journal of Geometry, 査読有, 107 (2016), 663—683
- 11 Toshizumi Fukui, Masaru Hasegawa and Kentaro Saji, Extensions of Koenderink's formula, Journal of Gekova Geometry Topology, 査読有, 10 (2016), 42—59
- 12 Goulwen Fichou and Toshizumi Fukui, Motivic invariants of real polynomial functions and their Newton polyhedrons, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読有, 160 (2016), 687--714
- 13 Carles Bivia-Ausina and Toshizumi Fukui, Mixed Lojasiewicz exponents and log canonical thresholds of ideals, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 220 (2016), 223--245
- 14 Satoshi Koike, Tzee-Char Kuo and Laurentiu Paunescu, A'Campo curvature bumps and the Dirac phenomenon near a singular point, Proceedings of the London Mathematical Society, 査読有, 111 (2015), 717--748
- 15 Satoshi Koike and Laurentiu Paunescu, On the geometry of sets satisfying the sequence selection property, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 67 (2015), 721—751
- 16 Satoshi Koike and Laurentiu Paunescu, (SSP) geometry with directional homeomorphisms, Journal of Singularities, 査読有, 13 (2015), 169--178
- 17 Goulwen Fichou and Masahiro Shiota, Continuous mappings between spaces of arcs, Bulletin de la Societe Mathematiques de France, 査読有, 143 (2015), 315—337
- 18 Jana Marikova and Masahiro Shiota, Measuring definable sets in o-minimal fields, 査読有, 209 (2015), 687—714

[学会発表](計 18件)

- 1 福井敏純、尖点と燕尾の局所微分幾何、第26回 沼津改め 静岡研究会 - 幾何、数理解析物理、そして量子論 -、2019
- 2 Toshizumi Fukui, On bifurcation of Euler beam problem, The 6<sup>th</sup> Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2018
- 3 Satoshi Koike, Finiteness problem for semialgebraic types of Nash mappings and Shiota conjecture, Real Algebraic Geometry and Singularity Theory Symposium, 2018
- 4 Toshizumi Fukui, Revisit Euler buckling problem, Real Algebraic Geometry and Singularity Theory Symposium, 2018
- 5 小池敏司, Finiteness theorem for blow-Nash triviality of a family of Nash surfaces, 微分幾何学・微分式系・特異点論の応用, 2018,
- 6 小池敏司, Directional properties of singular spaces: toward the study of their global properties (I), (II), 第7回神戸特異点研究会, 2018
- 7 福井敏純, On change of variable formula, 第7回神戸特異点研究会, 2018
- 8 Satoshi Koike, Characterisations of V-sufficiency and  $C^0$  sufficiency of relative jets, Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, Sydney 2017, 2017
- 9 Toshizumi Fukui, Arc spaces, motivic measure and Lipschitz property on real algebraic varieties, Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, Sydney 2017, 2017
- 10 福井敏純, Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail, RIMS 共同研究(公開型)「可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究」, 2017
- 11 塩田昌弘, Godel と多様体の分類(I)、(II)、研究集会「特異点の大域的研究」, 2016
- 12 Toshizumi Fukui, Lipschitz property of Nash maps, The 4<sup>th</sup> Franco-Japanese-Vietnamese Singularities, 2016
- 13 塩田昌弘, Neron desingularization の応用(I)、(II)、第6回神戸特異点研究会, 2015
- 14 Satoshi Koike, Finiteness on semialgebraic types of Nash mappings defined on a Nash surface, International Symposium “Real Singularities and Applications”, 2015
- 15 Toshizumi Fukui, Lipschitz property for arc-analytic map, International Symposium “Real Singularities and Applications”, 2015
- 16 塩田昌弘, ヒルベルトの立場から見た多様体、数理解析研究所研究集会、2014
- 17 Satoshi Koike, Finiteness on semialgebraic types of Nash mappings defined on a Nash surface, International Workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related Topics, 2014
- 18 Toshizumi Fukui, Contact of a surface with cylinders and cubic binary differential equations, The 13<sup>th</sup> International Workshop on Real and Complex Singularities, 2014

[図書](計 3件)

- 1 Toshizumi Fukui, Satoshi Koike and Laurentiu Paunescu, Area of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University, Saitama Mathematical Journal 31 (Proceedings of the 6<sup>th</sup> JARCS Kagoshima 2015), 2017
- 2 福井敏純、牧野書店、曲線と曲面の基礎・基本、2015
- 3 Satoshi Koike, Stefan Papadima and Laurentiu Paunescu (Guest Editors), Editura Academiei Romane, Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics, Tome IX, No. 4 (Proceedings of the 5<sup>th</sup> JARCS Sydney 2013), 2015

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/koike/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：塩田 昌弘

ローマ字氏名：SHIOTA MASAHIRO

所属研究機関名：名古屋大学大学院

部局名：多元数理科学研究科

職名：名誉教授

研究者番号（8桁）：00027385

研究分担者氏名：福井 敏純

ローマ字氏名：FUKUI TOSHIZUMI

所属研究機関名：埼玉大学

部局名：大学院理工学研究科

職名：教授

研究者番号（8桁）：90218892

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：石川 剛郎（北海道大学）

ローマ字氏名：ISHIKAWA GOO

研究協力者氏名：佐伯 修（九州大学）

ローマ字氏名：SAEKI OSAMU

研究協力者氏名：KARIM BEKKA (Universite de Rennes 1)

ローマ字氏名：AS ABOVE

研究協力者氏名：TZEE-CHAR KUO (University of Sydney)

ローマ字氏名：AS ABOVE

研究協力者氏名：PIERRE MILMAN (University of Toronto)

ローマ字氏名：AS ABOVE

研究協力者氏名：TA LE LOI (University of Da Lat)

ローマ字氏名：AS ABOVE

研究協力者氏名：ADAM PARUSINSKI (Universite de Nice)

ローマ字氏名：AS ABOVE

研究協力者氏名：LAURENTIU PAUNESCU (University of Sydney)

ローマ字氏名：AS ABOVE

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。