

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 27 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26287017

研究課題名(和文)フラクタルにおける代数的・幾何学的構造と解析の相互的な関わりの研究

研究課題名(英文)Relation between algebra, geometry and analysis on fractals

研究代表者

木上 淳(Kigami, Jun)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：90202035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,600,000円

研究成果の概要(和文)：自己相似集合や力学系の不変集合などの代表的なフラクタル集合において、その集合を特徴付ける代数的・幾何学的な構造とその上の解析学の相互関係について研究を行った。具体的には、例えば、一般化されたシルピンスキーカーペット上のブラウン運動の特異な測度に対する時間変更について、弱幾何級数的という条件の下で、ポアンカレ不等式を確立し、連続な熱核の存在を示し、測度から定義される距離もどきを用いた熱核の漸近評価を得た。

研究成果の概要(英文)：We have studied the relation between geometric and algebraic structures and analysis on fractals such as self-similar sets and invariant sets of various dynamical systems. For example, we have considered time changes of the Brownian motions on generalized Sierpinski carpets with respect to singular measures. We have established the notion of weakly exponential weakly exponential measures. If a measure is weakly exponential, then we have shown certain type of Poincare inequality, the existence of jointly continuous heat kernel and an asymptotic heat kernel estimate using the protodistance associated with the weakly exponential measure.

研究分野：解析学基礎・確率論

キーワード：フラクタル 熱核 ラプラシアン Dirichlet form 力学系 タイリング

## 1. 研究開始当初の背景

自己相似集合や Julia 集合などのフラクタルにおいては、ユークリッド空間や多様体ではあまり意識されなかった、解析学とそれを支える代数的・幾何学的構造の間の関わりが重要な役割を果たすことが知られつつあった。例えば、SG 上の解析学の研究においては、SG を生成する仕組み（縮小写像の組）の本質として無限列の空間上の有限個の代数的な関係式が抽出され、その関係式から導かれる非線形繰り込み方程式の解として Brown 運動が構成された。そして Brown 運動の背後にある「測度論的リーマン構造」が発見され、それに付随する「測地線距離」が SG の一つの真の姿が明らかにした。更にこの事実の拡張として、日野により一般の拡散過程に対して測度論的リーマン構造の理論を構築するための突破口が開かれた。これは、フラクタル上の解析とリーマン多様体上の解析が一つの大きな枠組みの下に統一される可能性を示唆していた。この可能性のもう一つの証拠として、砂田・小谷によるクリスタル格子の理論と、自己相似集合上の測度論的リーマン構造の理論のつながりがある。いずれの理論においても、「エネルギーを最小化するグラフ」(Harmonic graph) と、それから自然に決まるリーマン構造が大きな役割を果たしている。このように、空間の代数的構造、幾何学、さらにその上の解析学の繋がりに対する研究の新たな段階が始まりつつあった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、まず「フラクタルを生み出す仕組みとそこに秘められた代数的・幾何学的構造」、「フラクタル上の解析的構造」および「フラクタルのもつ Intrinsic な幾何学的構造」の3つの関わりを、Self-similar set, Julia set, self-similar tiling などの様々なフラクタルの例を通じて、明らかにすることにある。具体的には、例えば一般化された Sierpinski carpet 上に Barlow-Bass によって構成されたブラウン運動の(特異なものを含む)測度に関する時間変更の漸近挙動を記述するのに適した距離の存在と構成、そのような距離が存在した場合の、熱核の漸近挙動などの問題を解決することが目的となる。さらに、そのような個々のフラクタルに対する研究を基盤として、それらを包含するような測度・距離空間における解析学の理論を展開することがこの研究の第二の目的である。大きく言えば、リーマン幾何学とフラクタル幾何学をそれらの空間上の解析も含めた視点から統一することを目指すとも言える。そのための基礎として、例えばコンパクトな距離付け可能な空間上において欲しい性質をもつ距離や測度の構成のための枠組みを作り、volume doubling や quasisymmetry などの測度・距離に関する性質を理解することも大きな目的の一つである。

## 3. 研究の方法

本研究は、国際的な共同研究を特色としている。海外の大学・研究集会に代表者・分担者を派遣し、フラクタルの研究者を初めとした幾何学・解析学を中心とする海外の専門家との対面での議論を契機に、研究を発展させてきた。特に、本研究では、Ka-Sing Lau 教授、Yang Wang 教授を初めとするフラクタル幾何学の研究で世界をリードする研究者を多数擁する香港において本研究の代表者・分担者計6名が参加した Workshop を平成27年3月に開催し、研究の連絡を行うとともに、共通の課題について議論を行った。

## 4. 研究成果

(1) 研究代表者木上は、 $n$ 次元の cube を含む一般化された Sierpinski carpet 上のブラウン運動の時間変更について研究を行った。測度が weakly exponential であるという概念を導入し、この条件の下では、時間変更が可能であることを示した。さらに、全ての自己相似測度は weakly exponential であること、random な自己相似測度が weakly exponential であるための十分条件、Gauss 自由場から導かれる Liouville 測度が weakly exponential であることなどを示した。これらの結果は、weakly exponential というクラスが数理論理などでも興味の対象となっている random な測度も含む十分広いクラスであることを意味している。さらに、weakly exponential の仮定の下に Poincaré 不等式を証明し、この事実を使って時間変更に対応する熱半群が ultracontractive であること、連続な熱核が存在すること、熱核の上からの評価評価が得られることを示した。さらに、時間変更の測度から、protodistance という概念を定義し、熱核の下からの評価がこの protodistance に対応する球の体積を用いて与えられることを証明した。さらに、時間変更の測度がユークリッド距離に関して volume doubling であるときには、protodistance の冪と同値な距離が構成でき、その距離に関して熱核が sub-Gaussian な評価を持つことや、walk 次元の特徴づけなどを得た。

(2) 研究代表者木上は、University of Stuttgart の Freiburg 教授、University of Ulm の Alonso Ruiz 博士との共同研究で、Stretched Sierpinski gasket と呼ばれる Sierpinski gasket の全ての分岐点を線分で置き換えた集合上の幾何学的な対称性をもつ resistance form の研究を行った。この Stretched Sierpinski gasket はフラクタルである Sierpinski gasket と線分のハイブリッドであり、その上での解析学・確率過程も、フラクタルと線分のどちらの性質がより反映されるのかが問題となっている。共同研究においては、幾何学的な対称性をもつ resistance form は、線分上の Dirichlet 積分の重み付きの和と Sierpinski gasket 上の standard resistance form の部分に分解される

ことを示しさらに、Dirichlet 積分の重みとしてどのような重みが許されるかについて完全な分類を行った。

(3) 研究代表者木上は、コンパクトな距離付け可能空間の逐次分割として tree で parametrize された partition について研究を行った。partition の各集合に様々な重みをのせることを考え、重みたちのあいだの Lipschitz 同値が、重みから距離が生成される場合には距離の間の Lipschitz 同値と、重みから測度と距離が生成される場合には測度と距離の間の Ahlfors regularity とそれぞれ対応することを示した。さらに重みのある冪に対応する距離が存在するための必要十分条件として、 $m$ -分離的という概念を導入した。

(4) 研究分担者熊谷は、ランダムコンダクタンスモデルで、コンダクタンスの値が上から有界かつ原点周辺で多項式増大する場合に、対応するマルコフ連鎖の熱核の精密な評価を与えた。特に、ガウス型熱核評価をもつための条件を、原点での増大度のオーダーを用いて導きだした。また、時間依存する離散的なランダム媒質において、媒質の小さな摂動で離散時間マルコフ連鎖の長時間挙動が大きく変わり得ることを示した。これにより、時間依存しないランダム媒質との顕著な違いが明らかになった。

(5) 研究分担者角は、正則写像の半群の力学系、付随するランダム複素力学系および非自励系反復関数系の研究を行った。正則写像の半群では次数 1 の場合に Julia 集合の絵の描き方に関する論文を出版し、ランダム複素力学系では応用としてランダムニュートン法により任意の複素多項式の根を見つける方法（従来の決定論的なものより利点がある）を見つけた。非自励系反復関数系では極限集合が通常のものではありえない性質を持つものを組織的に大量に見つけた。

(6) 研究分担者秋山は、結晶の成長を記述する抽象的枠組みとして Corona 極限を導入し、その基本的性質を調べた。特に格子群を周期としてもつタイル張りにおいては Corona 極限は存在し原点对称の凸多面体となることが証明できた。さらに一般のタイル張りでも同様反復的な場合（あるいはそれより狭いクラス）では同様な結果が期待される。

(7) 研究分担者、栗田は測度距離空間で意味をなす、次元を加味した曲率次元条件の熱分布による特徴づけについて幾つかの成果を得た。フラクタル上でそれらを修正した条件が成立するかどうか調べることには、大きな意義があると考えられる。

(8) 研究分担者日野は、フラクタル上のエネルギー測度の分布についての研究を行った。特に、R. Bell, C.-W. Ho, R. S. Strichartz による先行研究において提出された 2 つの予想のうち 1 つを肯定的に解決した。さらに一般の状態空間における強局所正則ディリクレ形式に付随するマルチンゲール次元の決定問題に

取り組み、ある付加条件のもとで上からの不等式評価を得た。また一般の状態空間において、強局所ディリクレ形式に低階項の摂動を加えた 2 次形式に付随する正值保存半群の短時間漸近評価について研究し、半群が積分型ヴァラダン評価を持つための十分条件を与えた。

(9) 研究分担者梶野は、ドイツ・Bielefeld大学の A. Grigor'yan 氏との共著論文において、拡散過程の熱核の劣 Gauss 型上方評価を時空間的に限定された仮定のみに基づいて導出する手法を確立した。さらにこの結果を応用することにより、ドイツ・Bonn大学の S. Andres 氏との共著論文において、Liouville 測度と呼ばれる 2 次元 Euclid 平面上のランダムな特異測度により 2 次元 Brown 運動を時間変更することで得られる Liouville Brown 運動という拡散過程について、その熱核の連続性と上方評価を証明した。

(10) 研究分担者宍倉は、1 変数複素力学系の擬等角変形の極限において退化していく写像族に関する Tropical limit を樹木上の区分線形力学系と複数のリーマン球面上の有理関数の組として定義し、その特徴付けおよび逆問題の考察を行った。また、円周上のアーノルド写像族の複素化を考察し、その複素パラメータ空間に現れるさまざまな構造について研究した。

(11) 研究分担者相川は、グラフで与えられた領域が大域的境界 Harnack 原理をみたくどうかについて研究し、成立するためのグラフのシャープな滑らかさを明らかにした。また、様々な容量大域平均の 0-1 法則を導いた。さらに、非有界集合の容量密度について考察した。特に半径一定の球に対する容量密度の中心を動かしたときの下限（下容量密度）を研究し、半径を大きくしたときの下容量密度の極限値は 0 か 1 に限る 0-1 法則 (dichotomy) を様々な状況で示した。また下容量密度極限の dichotomy が成立しない容量を与えた。この問題はラプラシアン の最小固有値と関係があり、ユークリッド空間に限らず、距離測度空間へ発展していくことを明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

① J. Kigami, Time changes of the Brownian motion: Poincare inequality, heat kernel estimate and protodistance, to appear in *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, 査読有

② P. Alonso Ruiz, U. Freiberg and J. Kigami, Completely symmetric resistance forms on the stretched Sierpinski gasket, to appear in *Journal of Fractal Geometry*, 査読有

③ M.T. Barlow, D.A. Croydon and T. Kumagai, Subsequential scaling limits of simple random walk on the two-dimensional uniform spanning tree, *Ann. Probab.*, to appear, 査読有

- ④ S. Akiyama, Strong coincidence and overlap coincidence, to appear in Discrete and Continuous Dynamical System, 査読有
- ⑤ H. Aikawa, Construction of a domain that fails the global boundary Harnack principle via the Helmholtz equation, J. Lond. Math. Soc. (2), 93, 3 (2016), 721--740, 査読有
- ⑥ H. Aikawa, Dichotomy of global density of Riesz capacity, Studia Math., 232, 3 (2016), 267-278, 査読有
- ⑦ M. Hino, Some properties of energy measures on Sierpinski gasket type fractals, J. Fractal Geom., vol. 3 (2016), 245--263, 査読有
- ⑧ H. Sumi, The space of 2-generator postcritically bounded polynomial semigroups and random complex dynamics, Adv. Math. 290 (2016) 809--859, 査読有
- ⑨ A. Grigor'yan and N. Kajino, Localized upper bounds of heat kernels for diffusions via a multiple Dynkin-Hunt formula, Trans. Amer. Math. Soc., 369(2017). 1025-1060 査読有
- ⑩ S. Andres and N. Kajino, Continuity and estimates of the Liouville heat kernel with applications to spectral dimensions, Probability Theory and Related Fields, 166(2016), 713-752 査読有
- ⑪ M. Erbar, K. Kuwada and Karl-Theodor Sturm, On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces, Invent. Math. Vol. 201 no.3 (2015) 993--1071, 査読有

〔学会発表〕 (計30件)

- ① J. Kigami, Completely symmetric resistance forms on the Stretched Sierpinski gasket, 2016 Summer School on Fractal Geometry and Complex Dimensions, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA, June 29, 2016
- ② H. Aikawa, Boundary Harnack Principle and smoothness of the domain, XVIIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, June 26-29, 2016, Chelm (Poland)
- ③ J. Kigami, Time change of Brownian motion; Poincare inequality and Protodistance, Lorenz center workshop; Fractality and Fractionality, Lorenz center, University of Leiden, May 18, 2016
- ④ J. Kigami, Time change of Brownian motion; Poincare inequality, heat kernel estimate and protodistance, 2016 Joint Mathematics Meeting, American Mathematical Society, Seattle, January 7, 2016
- ⑤ T. Kumagai, Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump processes on metric measure spaces, 1st Hong Kong/Kyoto Workshop on Fractal Geometry and related Areas, March 21, 2016, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China

- ⑥ K. Kuwada, Analysis of heat distributions on Riemannian metric measure spaces with a lower Ricci curvature bound, 1st Hong Kong/Kyoto Workshop on Fractal Geometry and related Areas, March 21, 2016, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China
- ⑦ M. Shishikura, Fractal Nature of Julia sets, 1st Hong Kong/Kyoto Workshop on Fractal Geometry and related Areas, March 21, 2016, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China
- ⑧ J. Kigami, Partition of metrizable spaces by trees, volume doubling measures and quasisymmetry, 1114th AMS meeting, California State University, Fullerton, Fullerton, CA, October 24, 2015
- ⑨ J. Kigami, Analysis on Fractals, 3rd Bremen Winter School and Symposium, Diffusion on Fractals and Non-linear Dynamics, University of Bremen, Germany, May 24, 2015
- ⑩ J. Kigami, Self-similar sets as quotients of shifts', New Directions in Fractal Geometry, Australian National University, Canberra, November 24, 2014
- ⑪ J. Kigami, Dirichlet forms on p-adic numbers and random walks on the associated tree', Dirichlet forms and its applications, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, October 21, 2014

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

木上 淳 (KIGAMI, Jun)

京都大学・大学院情報学研究所・教授

研究者番号：90202035

### (2)研究分担者

相川 弘明 (AIKAWA, Hiroaki)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：20137889

栗田和正 (KUWADA, Kazumasa)

東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：30432032

日野正則 (HINO, Masanori)

京都大学・大学院理学研究所・教授

研究者番号：40303888

角 大輝 (SUMI, Daiki)

大阪大学・大学院理学研究所・准教授

研究者番号：40313324

秋山 茂樹 (AKIYAMA, Shigeki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：60212445

穴倉 光広 (SHISHIKURA, Mitsuhiro)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70192606

熊谷 隆 (KUMAGAI, Takashi)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90234509

梶野 直孝 (KAJINO, Naotaka)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90700352

### (3)連携研究者

小谷 元子 (KOTANI, Motoko)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50230024

亀山 敦 (KAMEYAMA, Atsushi)

岐阜大学・工学部・教授

研究者番号：00243189

太田 慎一 (OHTA, Shin-ichi)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：00372558

伊藤 俊次 (ITO, Shunji)

東邦大学・理学部・訪問教授

研究者番号：30055321

高橋 智 (TAKAHASHI, Satoshi)

奈良女子大学・人間文化研究科・准教授

研究者番号：70226835