1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２２ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６２８７０２３

研究課題名（和文）流体方程式の散逸的弱解を通した乱流理論の新展開

研究課題名（英文）Understanding of turbulent phenomena through dissipative weak solutions to fluid equations

研究代表者
坂上　貴之（Sakajo, Takashi）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：１０３０３６０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,400,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式の弱解で滑らがないために本来保存すべき量を特異に散逸させるものを「散逸的弱解」と呼ぶ．Euler方程式の散逸的弱解は乱流現象の理解の鍵とされるが，その数学的困難のため未知の部分が多い．本課題ではEuler方程式に関係する一次元モデル方程式（一般化Constantin-Lax-Majda-DeGregorio方程式）と二次元Euler-Poincare方程式に対する点渦力学について，これらの方程式の散逸的弱解とエンストロフィーカスケード乱流の関係を明らかにし，乱流の数学的理解を深めることができた．

研究成果の概要（英文）：Non-smooth solutions to differential equations that dissipate conserved quantity anomalously are called dissipative weak solutions. It is said that dissipative weak solutions to incompressible Euler equations play an important role in understanding of turbulent phenomena, but a little is known due to the difficulty of mathematical treatment of Euler equations. In this project, toward the understanding of turbulent phenomena, we consider two hydrodynamic equations, the generalized Constantin-Lax-Majda-DeGregorio equation and point vortex equations associated Euler-Poincare system, and figure out the connection between dissipative weak solutions to those equations and enstrophy cascade turbulence in terms of the theory of dynamical systems.

研究分野：応用数学(数理流体力学)

キーワード：応用数学　流体力学　関数方程式論　数理物理　統計力学　乱流理論　渦力学

1．研究開始当初の背景

コルモゴロフによる三次元一様等方乱流理論における仮定の一つに，非粘性極限において流れのエネルギー散逸率が正の値に収束するというものがある．しかし，もし非粘性極限の流れを記述する Euler 方程式の解が滑らかであれば，そのエネルギーは保存され，その散逸率はゼロとなるため，この仮定を満たす非粘性極限流れは滑らかになれない．これに対して，Onsager[A1]は非粘性流れ場が 1/3 より大きな指数を持つヘルダー連続性を持てばエネルギーを保存すると言明した．これは，現在 Onsager 予想と呼ばれている．この予想に対して，Constantin ら[A2]は周期境界条件に対する三次元 Euler 方程式の弱解が Besov 空間 $B^{\alpha}_{3,\infty}$に入っているとき，α>1/3 ならばエネルギーを保存することを証明した．この空間の指数は関数の L^3空間でのヘルダー連続性に相当するので，この定理は Onsager 予想の現代数学的記述である．また Duchon, Robert[A3] は，超関数の意味でエネルギー散逸率が非負になるような Euler 方程式の弱解を散逸的弱解と定義し，そのヘルダー指数が 1/3 より少し滑らかな弱解に対してエネルギー散逸率はゼロになることを示した．さらに，この散逸的弱解が Kolmogorov 理論から得られる速度差の三次モーメントに対する統計法則を，ある種のエルゴード仮説のもとで実現することも示している．

一方，ヘルダー連続な弱解の構成については，De Lellis と Szekelyhidi Jr.[A4] が，任意に与えられたエネルギー変動を持つ Euler 方程式の弱解でそのヘルダー指数が 1/10 未満（本研究期間中この指数は 1/3 まで拡張できることが Buckmaster と同氏らにより示され[A5]数学的に極めて重要な成果を残している）となる解の存在が示されたが，こうした解と Duchon と Robert による散逸的弱解，さらには乱流統計理論との関係は依然明らかでない．このような背景から三次元 Euler 方程式の散逸的弱解は乱流理論構築の鍵であるものの，その数学解析的困難のため依然未知の部分が多い．

そこで，比較的取扱いが容易な流体方程式系の解析を通して，こうした散逸的弱解の性質および，それらが作る乱流的な統計法則との関係を段階的に明らかにすることが，三次元乱流の数学的理解につながる指針となることが期待される．

[A1] Onsager, L. (1949) Nouvo Cimento Suppl. 6, 279-289
[A2] Constantin, P., E, W. and Titi, E.S. (1994) Comm. Math. Phys. 165, 207-209
[A3] Duchon, J. and Robert, R. (2000) Nonlinearity 13, 249-255
[A4] De SLellis, D. and Szekelyhidi Jr., L. (2012) arXiv:1205,3626
[A5] Buckmaster, T. De Lellis, C. and Szekelyhidi Jr., L. (2016) Comm. Pure Appl. Math. 69 1613-1670

2．研究の目的

Euler 方程式に関連する二つの流体方程式を考え，それらの弱解で十分な滑らかさがないために本来保存される量を特異散逸させるものを「散逸的弱解」と定義し，以下の方程式系に対して，その存在や性質を調べるとともに，それらを用いて，これら方程式の解の集合が見せる複雑流れ場の統計性質との関係を明らかにする．

(P1) 一般化 Constantin-Lax-Majda-De Gregorio (gCLMDG) 方程式
(P2)二次元 Euler-α 方程式と点渦力学

3．研究の方法

上記目的の達成のため以下の(P1)(P2)のプロジェクトを設定し研究を行う．

(P1)gCLMDG 方程式の散逸的弱解と乱流理論

三次元 Euler 方程式に現れる二つの非線型項「渦の引き延ばし項」と「渦の移流項」のバランスは，その解の存在だけでなく，エネルギー変動を考える上でも重要だが，これを調べる一次元モデルとして gCLMDG 方程式が知られている．これに対して散逸的弱解が存在するか調べる．この方程式は，パラメータをうまく調整することで非粘性方程式の解の L^p ノルムを保存させられるので，この保存量のカスケード現象の特徴づけと散逸的弱解の集合が作る乱流統計則とを結びつけ，新しい乱流理論の構築の足がかりとする．

(P2) 二次元 Euler-α 方程式の散逸的弱解と二次元乱流

二次元 Euler 方程式の散逸的弱解と二次元乱流の関係を二次元 Euler-α 方程式を用いて調べる．二次元 Euler 方程式において 散逸的弱解を得るための必要条件は渦度の初期分布が Radon 測度となることなので，渦度が点分布（α 点渦）あるいは線分布（α 渦層）を考え，その特異解と乱流統計則の関係を明らかにする．

■ P2-1: α 点渦系の力学系理論 ■

α 点渦系の $\alpha\to 0$ での三点渦衝突解によるエンストロフィー特異散逸をハミルトン力学系における衝突多様体理論や非可積分性といった観点から調べ，点渦系がもたらすエンストロフィー特異散逸の数学的構造を明らかにする．

■ P2-2: α 渦層の数値解析 ■

二次元 Euler 方程式における渦層では，その渦層を表現する界面の滑らかさが有限時間で失われることが知られている．渦層を Euler-α 方程式に対して考え(α 渦層)，$\alpha\to 0$ の極限でこの特異性の出現とエンストロフィー散逸の関係を調べる．

■ P2-3:二次元 Euler-α 方程式乱流の数値解析と統計 ■

二次元 Euler-α 方程式大規模数値計算により二次元乱流の統計則を特徴づけ，上記

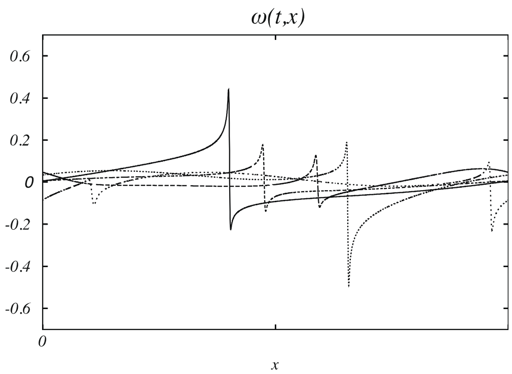
の α 渦層や α 点渦のエンストロフィー特異散逸がこの二次元乱流統計則に与える影響を明らかにする．

４．研究成果

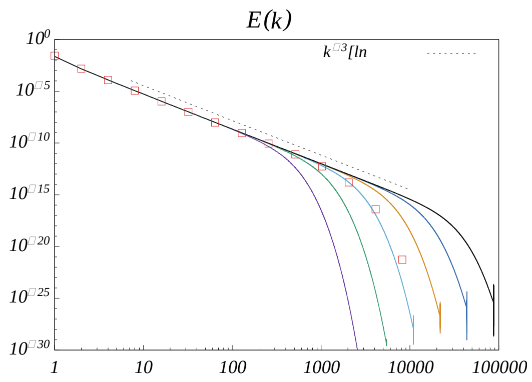
各プロジェクトの主要な成果は以下の通り

(P1)gCLMDG 方程式の散逸的弱解と乱流理論

gCLMDG 方程式に粘性項とランダム外力を付加したものを考えた．手始めとして，非粘性の時に解の L^2 ノルムが保存されるパラメータを扱った．これは乱流物理モデルという観点から見ればエンストロフィーが保存する場合に対応している．この解が乱流的な挙動を示すかを数値的に調べたところ，特異なパルス構造を生成・消滅を繰り返しつつ左右にランダム移動するという挙動を見せた．（下図に解のスナップショットを示す．以後これを乱流パルス解と呼ぶ．）



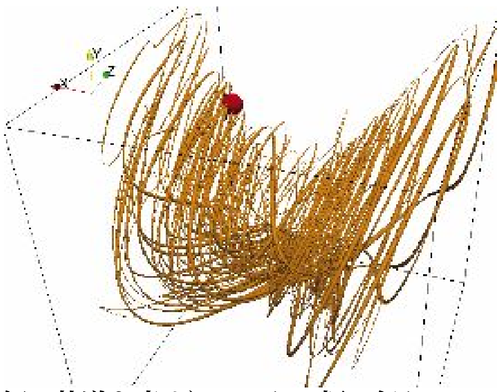
この乱流パルス解の長時間平均をとって，そのエネルギースペクトルを計算したところ，粘性ゼロ極限でエネルギースペクトルにエンストロフィーの散逸に対応する慣性領域が形成されることが観察された．(下図の□は乱流パルス解の示すエネルギースペクトル)この慣性領域での状況を乱流理論とのアナロジーに基づいて調べたところ，以下が明



らかになった．

(1) エネルギーカスケードの減衰べきが k^3 に log の補正のついたものとなっている．この状況は二次元乱流におけるエンストロフィーカスケードと類似している．
(2) 慣性領域においてエンストロフィー散逸率が一定になっており，確かにこの波数領域において，エンストロフィーの散逸が起こっている．
(3) 高次モーメントが負の相関を持つこと．

次に，これらの統計則と方程式の解の挙動との詳細な比較を行った．方程式の外力をランダムなものから決定論的定常外力に変更して数値計算を行うと，乱流パルス解は出現せず安定な定常解へ急速に漸近することがわかり，外力の変更が本質的な解の挙動に大きな影響を与えることが明らかになった．それだけでなく，この定常解のエネルギースペクトルを計算すると，それが乱流パルス解の作る長時間平均のエネルギースペクトルと非常によく一致することが見いだされた．この事実を用いて，安定定常解を高精度に数値計算して，慣性領域における減衰べきを見積もり log 補正の大きさを精度よく計算することができた．この知見に基づくと，乱流パルス解の見せる乱流的な統計則はランダム力学系の言葉として，定常外力下で得られる安定定常解の周りを（無限次元相空間の上で）ランダムに解軌道が時間発展していると記述することができるはずである．そこで，解のスペクトルに対する波数空間から適当な三モードをとりだし，乱流パルス解と安定定常解を射影して，その時間発展の様子を観察すると，安定定常解に対応する点の周りをランダムに軌道動いているだけではなく，ランダム外力が低波数側でガウシアンの形で加わっているにもかかわらず，得られるランダム解軌道が特徴的な「二枚羽根構造」（下図．赤丸は安定定常解，黄色の軌道は乱流パルス



解の軌道を表す）のように振る舞うことが見いだされた．

別の三モードに射影しても，同様の羽構造が見いだされ，このランダム解軌道は特徴的な無限次元多様体の近傍を自己相似的に動いている．これは乱流カスケードを無限次元ランダム力学系の枠組みで理解することが可能であることを示している．加えて，安定定常解は粘性ゼロ極限において，そのパルス構造を自己相似的に発散するので，これは散逸的弱解であると考えられる．そのことを確かめるために，Duchon と Robert の行った解析をこの gCLMDG に対して行い，ある種の統計則を再現することが確認されている．

つづいて，gCLMDG 方程式の非粘性保存量を一般の L^p ノルムが保存される場合にパラメ

ータを設定して調べた．その結果，1≦p≦4の場合には，上記のエンストロフィーカスケードと同様の結果が成立する．さらに，p を一般にしたことで，乱流パルス解のパルス近傍での自己相似性やパルス外側での減衰率といったより詳細な情報などを取り出すことが可能になった．

これらの成果は論文としてまとめ学術雑誌に投稿し，一部は掲載済み（論文②）他のものは現在，査読改訂中である．

(P2) 二次元 Euler-α 方程式の散逸的弱解と二次元乱流

(P2-1)α 点渦系の解析：まず，Euler-α方程式にラドン点測度の初期値をつけた場合の初期値問題の解が時間大域的に存在することを示した．（論文①）この結果は，このような時間大域弱解の存在が保証されない二次元 Euler 方程式とは著しく異なる性質である．次に Euler-α方程式から形式的に導出される点測度の特異点の時間発展方程式（点渦方程式＝ハミルトン系の常微分方程式）も時間大域解を持つことや，三体問題が可積分であることを示した．加えて，この ODE の解が二次元 Euler-α 方程式に対して示されている時間大域的弱解であることも証明された．この三体問題について，特にα＝0 に対応する点渦方程式において衝突解が存在するパラメータ領域の解を詳細に調べたところ，α≠0 の時は時間大域解が存在するので衝突解は存在しないものの，α→0 の極限において解は自己相似衝突解へと広義一様収束し，さらにその衝突前後の解に対して定義されるエンストロフィー変動が，衝突前後でデルタ関数に超関数の意味で収束することが示された．（論文③）これは衝突解がエンストロフィーを特異散逸する散逸的弱解となっている．これは，二次元乱流においてみられるエンストロフィーカスケードを引き起こす非粘性極限における特異散逸解を具体的な渦運動として，その存在を数学的に位置づけた本研究課題における重要な成果となっている．

加えて，ハミルトン力学系（保存系）であるにもかかわらず，時間の方向を変えても，常に衝突時にエンストロフィー「散逸」を起こすことも明らかになった．これは保存力学系における「時間の矢」の数学的起源を示唆する例としても興味深いものである．

この後，この結果が Euler-α方程式特有の現象なのかどうかという点について研究を続け，Euler-α方程式の変分原理に基づく導出を一般化して得られる Euler-Poincare 正則化方程式系を考えた．この系に対する点測度初期値に対する時間大域解の存在を後藤田が示し(論文⑩)，Euler-α方程式と同様の解析を Euler-Poincare 点渦方程式に対して進めたところ，正則化パラメータがゼロに近づく極限に対して，エンストロフィーを特異散逸する自己相似衝突解の存在が証明された．このことは，正則化の方法によらずに同様の現象が起こることを示唆しており，二次元乱流における特異エンストロフィー散逸を引きおこす流体運動のメカニズムとして，渦衝突が普遍的なものの一つであることを強く示唆する数学的結果である．この結果は現在学術雑誌に投稿中である．

四点以上の点渦系に対しては，一般に点渦方程式が可積分でないことから，三点の場合のような解析が容易ではないので，数値実験を多数行った．（論文①）それによると，三点の場合のような単純な挙動はなくなり，点渦の強さの選び方によって，エンストロフィーが散逸，発散したり振動したりことがわかった．これらの系統的解析は今後の課題である．

(P2-2)については，本研究課題開始当初にα渦層の数値計算法の検討を行ったが，α→0 の極限を検討するためには非常に長時間の数値積分が必要となる．その結果，丸め誤差の蓄積が無視できなくなり，期待されたエンストロフィー散逸を得られず，数値計算によってα渦層の特異点形成によるエンストロフィー散逸を検討することが難しいことが明らかになった．そのため，研究計画を途中で変更し，本件は研究を一時中断して（P2-1）に集中することとしたが，その結果 Euler-Poincare 系でもエンストロフィー散逸が得られるという知見を得たので，今後は数値計算の扱いが容易な正則化渦層に対して数値的な検討を加えることにしている．

(P2-3)については，数値計算を行って比較を試みたが，周期境界条件で Euler-α方程式を数値計算する一方で，(P2-1)では無限遠の境界条件を課していることなどから単純な比較ができず，試行錯誤を繰り返したが，現時点では明確な対応を検討することができなかった．これも今後の検討課題である．

その他の成果の概要は以下の通り．坂上は曲面上の点渦力学の研究を進めた．特にトーラス面上の点方程式の導出と解析を行った．前川は非圧縮性粘性流体の非粘性極限における境界層の安定性について研究を行い，層流から乱流への遷移の要因の一つとして知られる Tollmien-Schilichting 不安定性と Prandtl 境界層展開の正当化との関係について明らかにした．また，回転する円柱周りの 2 次元流れの安定性やエネルギー減衰構造を明らかにした．柴山はケプラー型ポテンシャル系のエネルギー固定問題に現れる衝突特異点および n 中心問題や制限 n 体問題を複素化して現れる特異点を解析し，周期解の存在や非可積分性を証明した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 14 件）

① T. Gotoda and T. Sakajo, Enstrophy variations in the incompressible 2D Euler flows and alpha point vortices, Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, Springer Proceedings in Mathematics and

Statistics 査読有, 183, 2016,
DOI: 10.1007/978-4-431-56457-7_14

② T. Matsumoto and T. Sakajo, One-dimensional hydrodynamic model generating turbulent cascade, Phys. Rev. E, 査読有, 93, 2016,
DOI: 10.1103/PhysRevE.93.053101

③ T. Gotoda and T. Sakajo, Distributional enstrophy dissipation via the triple vortex collapse, J. Nonlinear Sci., 査読有, 26, 1525–1570, 2016,
DOI: 10.1007/s00332-016-9312-y

④ T. Sakajo and Y. Shimizu, Point vortex interactions on a toroidal surface, Proc. Roy. Soc. A, 査読有,472, 2016,
DOI: 10.1007/s00332-016-9312-y

⑤ M. Shibayama, Periodic solutions of a perscribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, Disc. Cont. Dyn. Sys. A, 査読有, 37, 2705–2715, 2017,
DOI: 10.3934/dcds.2017116

⑥ Y. Maekawa, On stability of steady circular flows in a two-dimensional exterior disk, Arch. Rat. Mech. Anal., 査読有, 225, 287–374, 2017,
DOI: 10.1007/s00205-017-1105-4

⑦ S.-I. Sohn Sung, T. Sakajo and S.-C. Kim, Stability of barotropic vortex strip on a rotating sphere, Proc. Roy. Soc. A, 査読有, 474, 2018, DOI: 10.1098.rspa.2017.0883

⑧ T. Sakajo, and Y. Shimizu, Toroidal Geometry Stabilizing a Latitudinal Ring of Point Vortices on a Torus, J. Nonlinear Sci., 査読有, 28, 1043-1077, 2018,
DOI: 10.1007/s00332-017-9440-z

⑨ M. Shibayama, Non-integrability of the spacial n-center problem, J. Diff. Eq., 査読有, 印刷中, 2018,
DOI: 10.1016/j.jde.2018.04.037

⑩ T. Gotoda, Global solvability for two-dimensional filtered Euler equations with measure valued initial vorticity, Differential and Integral Equations, 査読有, 印刷中, 2018

⑪ M. Higaki, Y. Maekawa, Y. Nakahara, On Stationary Navier-Stokes Flows Around a Rotating Obstacle in Two-Dimensions, Arch. Rat. Mech. Anal., 査読有, 228, 603–651, 2018, DOI:10.1007/s00205-017-1201-5

⑫ D. Gerard-Varet and Y. Maekawa, Note on the analysis of Orr-Sommerfeld equations and application to boundary layer stability, RIMS Kokyuroku, 査読無, 2058, 108–119, 2018

⑬ Y. Maekawa and J. Sauer, Maximal regularity of the time-periodic Stokes operator on unbounded and bounded domains, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 69, 1403–1429, 2017,
DOI:10.2969/jmsj/06941403

⑭ Y. Maekawa, Remark on Stability of Scale-Critical Stationary Flows in a Two-Dimensional Exterior Disk RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 67, 105–130, 2017, DOI:10.1007/978-3-319-66764-5_6

〔学会発表〕（計 27 件）

1. T. Sakajo, Anomalous enstrophy dissipation and 2D vortex collapse, The 6th Euro-Japanese Workshop on Blow-up (招待講演)(国際学会)2014 年
2. T. Sakajo, On point vortex alpha system and vortex collapse with enstrophy dissipation, The 8th CREST-SBM International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future (招待講演)(国際学会)2014 年
3. Y. Maekawa, On isomorphism for the space of solenoidal vector fields and its application to the Stokes problem, RIMS 研究集会「非圧縮性粘性流体の数理解析」(招待講演) 2014 年
4. 坂上 貴之, オイラー方程式の散逸的弱解と点渦衝突による特異エンストロフィー散逸, 東北大応用数学セミナー 2015 年
5. T. Sakajo, On the generalized non-viscous/viscous DeGregorio equation - singular solutions and statistical properties, International Congress of Industrial and Applied Mathematics 2015 (国際学会) 2015 年
6. T. Sakajo, Hydrodynamic one dimensional model for enstrophy cascade turbulence, Naruto Workshop on Vortex Dynamics (国際学会) 2016 年
7. T. Sakajo, Mathematical models of anomalous enstrophy dissipation and enstrophy cascade in 2D turbulence, Advanced Computing and Theoretical Fluid Mechanics (招待講演) (国際会議) 2016 年
8. T. Sakajo, Towards a mathematical theory of turbulence: a survey and a model study, Colloquium of Mathematics at McMaster Univ. (招待講演) 2016 年
9. T. Sakajo, Dissipative weak solutions and vortex dynamics: a survey and model study, Applied Mathematics Seminar, Stanford Univ. (招待講演) 2016 年
10. T. Sakajo, Dissipative vortex collapse and time's arrow, The 11th East Asia SIAM Conference (招待講演)(国際学会) 2016 年
11. M. Shibayama, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, The 11th AIMS Conference (招待講演) (国際学会) 2016 年
12. T. Sakajo, Words and Trees: Symbolic

Classifications of Streamline Topologies for 2D Incompressible Vortex Flow, The 11th AIMS Conference (招待講演)（国際学会）2016 年
13. 松本 剛,坂上 貴之,空間 1 次元偏微分方程式による乱流的カスケードのモデリングと力学系的階層構造, Perspectives in Mathematical Sciences 2016 年
14. T. Sakajo, Point vortex dynamics on a toroidal surface, ANZIAM 2017 Annual Meeting 2017 年（国際学会）
15. T. Sakajo, Turbulence and topology: recent explorations in mathematical fluid mechanics, QUT SMS Seminar（招待講演） 2017 年
16. T. Sakajo, One dimensional hydrodynamic PDE model for turbulence with cascade and singular solutions, The 14th International Conference on Flow Dynamics（国際学会）2017 年
17. T. Sakajo, Point vortex dynamics on a toroidal surface, The 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics（国際学会）2017 年
18. T. Sakajo, One-dimensional hydrodynamic equation generating turbulent scaling laws and self-similar singular solutions, The 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics（国際学会）2017 年
19. T. Gotoda and T. Sakajo, Universality of the anomalous enstrophy dissipation at the collapse of three point vortices on Euler-Poincare models, The 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamic（国際学会）2017 年
20. 柴山 允瑠, 制限 n 体問題の非可積分性, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会, 2017 年
21. 柴山 允瑠, ケプラー型ポテンシャル系のエネルギー固定問題における周期解の存在, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2017 年
22. 柴山 允瑠, 制限 n 体問題の非可積分性, 応用数理学会年会応用力学系, 2017 年
23. T. Kishi, Numerical Investigation of pair dispersion in two-dimensional turbulence via delay-time statistics, 16th European Turbulence Conference（国際学会）2017 年
24. 坂上 貴之, 非粘性保存量の乱流カスケードを実現する 1 次元流体方程式について, 日本数学会年会 2018 応用数学分科会, 2018 年
25. 松本 剛, オイラー方程式散逸的弱解の数値的構成,日本物理学会秋季大会, 2017 年
26. 前川 泰則, On axisymmetrization and boundary layer in the two-dimensional exterior flow around a fast rotating obstacle, HMA セミナー・冬の研究会 2018（招待講演), 2018 年
27. Y. Maekawa, On stability of some nearly inviscid flows , The 35th Kyushu Symposium on PDEs (招待講演)(国際学会）2018 年

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
○ 国際研究集会の主催・共催
1. ICIAM2015 Mini-symposium, 2015 年 08 月 10 日, Beijing, China
2. Naruto Workshop on Vortex Dynamics, 2016 年 1 月 15 日～2016 年 1 月 17 日 Naruto, Japan
3. AIMS Conference Mini-Symposium, Vortex Dynamics and Geometry: Analysis, Computations and Applications 2016 年 7 月 4 日 Orlando USA
4. International Workshop on Mathematical Science for Nonlinear Phenomena 2016 年 09 月 28 日～2016 年 10 月 01 日 Obihiro, Japan
5. 流体方程式の構造と特異性に迫る数値解析・数値計算 II 2017 年 1 月 13 日, Nagoya Japan

６．研究組織
(1)研究代表者
坂上 貴之（SAKAJO, Takashi）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：１０３０３６０３
(2)研究分担者
松本 剛（MATSUMOTO, Takeshi）
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：２０３４６０７６
前川 泰則（MAEKAWA, Yasunori）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：７０５０７９５４
柴山 允瑠（SHIBAYAMA, Mitsuru）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：４０４６７４４４
(3)連携研究者
藤原 宏志（FUJIWARA, Hiroshi）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：００３６２５８３
(4)研究協力者
後藤田 剛（GOTODA, Takeshi）
北海道大学・電子科学研究所・博士研究員