

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26350416

研究課題名(和文) 途中退去のある複数サーバ待ち行列の待ち行列長分布評価法

研究課題名(英文) Method of computing queue length distribution of multiserver queue with abandonment

研究代表者

河西 憲一 (Kawanishi, Ken'ichi)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：50334131

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では途中退去が伴う複数サーバ待ち行列システムの待ち行列長分布について検討した。特に途中退去までの時間が一定の場合を前提として、待ち行列長の定常分布を解析した。サービス中の客のうち、最後にサービスを開始した客の経過系内滞在時間、あるいはシステムの仮待ち時間が従うべき積分微分方程式を導出し、それらの解を行列指数形式の混合として与えた。さらに行列指数形式を安定行列として表現することにより、数値計算に適した待ち行列長分布の評価アルゴリズムを開発した。さらに、客が途中退去する確率、客の待ち時間分布を評価するアルゴリズムも開発した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied queue length distribution of multi-server queues with abandonment. In particular, we analyzed stationary queue length distribution of the multi-server queue in case where time to abandon is constant. We derived integro-differential equations of the attained waiting time of the last customer being served and the virtual waiting time of the system. We obtained solutions of the integro-differential equations with the mixture of matrix exponentials. By expressing the matrix exponentials with stable matrices, we obtained algorithms to numerically compute the queue length distribution in a stable manner. Furthermore, we provided algorithms to compute the abandonment probability and waiting time distribution of customers.

研究分野：数理工学

キーワード：待ち行列理論 応用確率過程論 モデル化 性能評価

1. 研究開始当初の背景

(1) 私たちの日常生活では様々な場面でサービスを受けるために列をなして待ち行列を形成することがある。このような待ち行列において、列に並んだが待ちきれずにサービスを受けず途中で列から退去することがある。サービスを受けずに途中で待ち行列から離脱する現象は、途中離脱、あるいは途中退去が伴う待ち行列として捉えることができる。途中退去のある待ち行列は、古くは C. Palm が 1937 年にその問題を扱った文献(文献)があり、その後多くの待ち行列理論家の関心を集めてきた(途中退去のある待ち行列モデルのサーベイについては文献 を参照されたい)。

(2) 途中退去のある待ち行列についての理論的な研究、特に待ち行列長を含む定常分布の研究では、これまでに国内外で主に次の 2 つの前提のもとで検討されてきた。

前提 1 : 途中退去するまでの時間は一定、ないし指数分布に従う

前提 2 : 客の到着はポアソン過程、サービス時間は指数分布に従う

前提 1 において、列に並んだ客がサービスを受けずに途中退去するまでの時間(以下、途中退去時間と呼ぶ)として指数分布を仮定する理由は、解析的に扱いやすい待ち行列モデルを構築するためである。すなわち、その動機はもっぱら数理解析上の要請であって、現実のデータと整合する保証はない。実際、例えばコールセンターにおける途中退去時間の実データを分析すると、途中退去時間が指数分布に従うとは言い切れず、その乖離は否定できない。一方、途中退去時間を一定とする場合は、文献 の特殊ケースになり、その場合の待ち行列モデルの解析的な性質はほぼ解明されている。ただし、文献 の解析手法は指数分布の強い性質である無記憶性に依拠するため、前提 2 が欠かせない。前提 2 を想定すると複数サーバの場合も容易に扱えるという利点がある一方で、前提 2 における到着過程に対する仮定はインターネットにおける映像データの到着過程には適用できない。映像データはパケットに分割されてバースト的に発生するため、その到着間隔に相関があるからである。さらにインターネットの映像配信を想定するならば、サービス時間に対応する伝送時間はパケット長が一定ならばほぼ一定でもあり、前提 2 におけるサービス時間が指数分布に従うという仮定とも整合しない。あるいは、サービス時間が指数分布に従うという仮定は、コールセンターへの応用を想定する場合にも不十分である。何故ならば、コールセンターにおける客のサービス時間は、客とオペレータとの通話時間のみならず、客との通話後に発生する後処理時

間も含まれるため、コールセンターのサービス過程を表現するには不十分であるからである(文献)。以上の考察から、客の到着過程が非ポアソン過程を、あるいはサービス過程が指数分布を前提とするのではない相関のある確率過程を前提とした途中退去待ち行列モデルの解明が応用面からも必要不可欠であることがわかる。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的はこのような途中退去が伴う待ち行列システムの待ち行列長分布の解明にある。ただし、サーバが複数存在することを前提とする。途中退去までの時間が一定であると仮定し、経過系内滞在時間と仮待ち時間を応用して待ち行列長分布を導出する。さらに客がサービスを受けずに途中退去する確率や、客の待ち時間分布などの性能評価指標を解析する。

(2) 待ち行列長分布や性能評価指標の厳密解を求めるに際して、それらの解表現が数値計算に適した表現形式となることを目指す。数値計算に適した表現形式に基づき、待ち行列長分布と性能評価指標を定量化する計算アルゴリズムを開発する。

3. 研究の方法

(1) 待ち行列長分布を評価するため、本研究では分布版のリトルの法則でも用いられる考え方を活用する。その考え方の要点は、「先着順サービス規律における単一サーバ待ち行列において、すべての待ち客はサービス中の客の経過系内滞在時間の間に到着している」という事実である。この考え方を複数サーバ待ち行列システムに援用するために、経過系内滞在時間の定義をやや修正する。仮に待ち行列システムにサーバが c 個配置されているとする。このとき、「先着順サービス規律を前提とするならば、すべての待ち客は、 c 番目にサービスを開始した客の経過系内滞在時間の間に到着している」という事実が成立する。この着想に基づき、本研究では、(A) 客の到着過程はポアソン過程であるが、サービス時間が相型分布である、(B) 客のサービス時間は指数分布であるが、到着過程がマルコフ型到着過程である、途中退去のある複数サーバ待ち行列システムを考察対象とする。

(2) まず(A)の待ち行列システムにおける経過系内滞在時間の確率分布を導出するため、文献 の方法にならって解析する。具体的には、経過系内滞在時間と相型分布で表現される相との結合分布が満たす積分微分方程式を導出する。同方程式は変数変換により、文献 で出現する仮待ち時間の方程式に帰着できる。この性質は、(A)の待ち行列システムにおける経過系内滞在時間が満たす積分微分方程式は、(B)の待ち行列システムの仮

待ち時間が満たす方程式と双対関係にあることに起因する。よって、(B)の待ち行列システムの仮待ち時間の確率分布の結果をなぞらせることで、(A)の待ち行列システムの経過系内滞在時間の確率分布が解析的に得られる。このように、(A)の待ち行列システムの経過系内滞在時間の確率分布は、実質的に(B)の待ち行列システムの仮待ち時間の解析結果を援用することができる。ただし、本研究課題では待ち行列長分布を評価するアルゴリズム開発を見据えて、文献では見過ごされていたトラヒック密度が1に等しい場合の解の性質を明らかにし、数値計算上安定なアルゴリズム開発に生かす。経過系内滞在時間の確率分布を用いて、待ち行列長の確率母関数を導出する。この確率母関数には行列の指数関数に関する積分が現れる。一般に、行列の指数関数はそれ自体数値計算が容易ではなく、ましてやその積分となると扱いにくい。本研究ではその積分を畳み込みとして評価し、安定行列に関する行列指数関数の形式に帰着させ、数値計算アルゴリズムに適した確率母関数の表現を導出する。

(3)(B)の待ち行列システムにおける経過系内滞在時間の確率分布を、仮待ち時間の確率分布から構成する。また、(A)の待ち行列システムの場合と同様に、トラヒック密度が1に等しい場合の解の性質を明らかにし、数値計算上安定なアルゴリズム開発に生かす。得られた経過系内滞在時間の確率分布を用いて、待ち行列長の確率母関数を導出する。この確率母関数にも行列の指数関数に関する積分が現れる。本研究ではその積分を畳み込みとして評価し、最終的な表現には一切積分記号が出現しない形式、すなわち安定行列に関する行列指数関数の形式に帰着させ、数値計算アルゴリズムに適した確率母関数の表現を導出する。

4. 研究成果

(1)本研究では、客の途中退去が伴う複数サーバ待ち行列システムにおいて、途中退去までの時間が一定である場合に、待ち行列長の定常分布の解析解を得るに至った。本研究成果の特徴は、対象とする待ち行列システムが複数のサーバから構成されて、(A)客の到着過程はポアソン過程であるが、サービス時間が非指数分布であること、さらに(B)客のサービス時間は指数分布であるが、到着過程が非ポアソン過程であることである。従来では単一サーバ待ち行列システムを扱うことが多かった本研究分野にあって、本研究成果により複数サーバ待ち行列システムに対して、途中退去が伴う場合の待ち行列長分布について、これまでは明らかにならなかった新しい知見が得られたことになる。さらに特筆すべきこととして、待ち行列長分布のみならず、客が途中退去する確率や、客の待ち時間分布などの性能評価指標を、数値的に定量

化する場合に適した形式で与えた点が挙げられる。待ち行列システムの理論的な研究においては、数学的に厳密な解析解を追求するあまり、その表現形式が実的な側面から評価すると適していないことが多い。本研究では数学的な厳密さを損なうことなく、かつコンピュータによる数値計算アルゴリズムを意識して、数値計算に伴う誤差をできるだけ抑制する表現形式を与えることに成功した。

(2)前記で得られた研究成果が前提とする(B)の待ち行列システムにおいて、客の到着間隔が各々独立で同一の相型分布に従う場合に、待ち行列システムの仮待ち時間について解析を深めた。その結果、仮待ち時間が行列指数形式と呼ばれる表現を持つことを証明した。前記で得られた解析解は、2つの行列指数関数の混合として表現される。行列指数形式は、簡単に述べれば1つの行列指数関数に集約した形式である。途中退去が伴う待ち行列システムの先行研究の結果から、単一サーバで客がポアソン過程に従って到着し、サービス時間が相型分布で与えられるならば、経過系内滞在時間が行列指数形式解をもつことが知られている。本成果は単一サーバモデルを軸にして到着間隔とサービス時間を交換することで得られる双対な待ち行列システムを考察すれば自然な結果ではある。しかしながら、一方では単一サーバを仮定しているが、他方では複数サーバにまで拡張可能であることが特徴的であり、理論的にも興味深い結果である。さらに、経過系内滞在時間が行列指数形式をもつことで、理論的な側面だけではなく、実的な利点も得られる。すなわち、行列指数形式では1つの行列指数関数を基礎に解を表現しているため、非負の値だけを用いて数値計算アルゴリズムを構成することが可能となる。そのため、負の数を扱うことに起因する数値計算上の不安定性を排除することができる。

(3)本研究の主要な目的は待ち行列長の定常分布を解明することであるが、その他にも客が途中退去する確率や、客の待ち時間分布についても解析することにある。本研究ではそれら所期の目的は達成されたが、なかでも客が途中退去する確率は、途中退去が伴う待ち行列システムの性能を評価する上で重要な指標といえる。そこで本研究成果を利用して、客の途中退去確率についてさらに知見を深めることにした。具体的には、途中退去時間が大きいときの漸近的な挙動に焦点を当て、近似的な評価式を得るに至った。厳密な解析解は数値計算アルゴリズムに資する形式で表現できているものの、システムに与えられるパラメータ(例えば途中退去時間)についてどのように振る舞うかが一見するだけでは不明瞭である。得られた近似式は、漸近的な評価式であるものの途中退去時間に対してどのように途中退去確率が変化するか

読み取れる形式であり、システムのパラメータを決定するに際して見通しを良くする。

(4) 先行研究により、途中退去が伴う複数サーバ待ち行列システムで、客がポアソン過程に従い、サービス時間を一般化した場合の客の途中退去確率を近似的に与える発見法的な評価式が知られていた。一方、本研究で扱った(A)の待ち行列システムでは、複数のサーバそれぞれにおけるサービス時間が相型分布に従うことを前提とするが、本研究により客の途中退去確率が解析的に厳密に与えられ、かつ数値計算アルゴリズムを通じて正確に評価可能である。一般に、複数のサーバから構成される待ち行列システムは、途中退去が伴わない場合ですら、サービス時間を一般的に扱うことが困難であり、途中退去が伴う場合も同様である。よって、実際上は悲負の確率変数が従う一般分布を任意精度で近似可能な相型分布をサービス時間として仮定し、行列解析法に代表される数値計算アルゴリズムに頼ってその性能評価指標を得ることが常である。本研究で得られた客が途中退去する確率も、行列解析法の算法に立脚した数値計算が可能であり、先行研究で知られていた発見法的な近似式にとって代わる評価式であるといえる。発見法的な近似式はその性格上、他の手段(例えばコンピュータシミュレーション)による精度検証が必要不可欠である。今回得られた厳密解に基づく結果と発見法的な近似式を比較することで、近似式の精度をコンピュータシミュレーションに依拠することなく定量化して把握することができる。一般的にコンピュータシミュレーションによって信頼性のある結果を得るためには多くの時間的なコストを費やす必要があるが、本研究成果を活用すれば時間的なコストを大幅に削減して信頼性のある評価が可能となる。

(5) 本研究が考察対象とした待ち行列システムは(A)と(B)に代表される。その特徴の第一は、到着間隔ないしサービス時間は指数分布に従うという点である。さらに、途中退去時間が一定値であるという点も見逃せない。このような制約があるがために解析的な解を得ることが出来たとも言える。本研究の成果を踏まえ、これらの制約を取り除いたより一般的な条件下で、途中退去のある複数サーバ待ち行列システムの解析が今後求められる。

<引用文献>

- C. Palm: Etude des delais d'attente, Ericsson Technics, vol. 5, pp. 37-56 (1937).
K. Wang, N. Li, and Z. Jiang: Queueing system with impatient customers: A review, IEEE International Conference on Service Operations and Logistics and Informatics (SOLI), pp. 82-87

(2010).

A. Brandt and M. Brandt: On the $M(n)/M(n)/s$ queue with impatient calls, Performance Evaluation, vol.35, pp.1-18 (1999).

T. Phung-Duc and K. Kawanishi: Modelling of retrial, abandonment and after-call work in call centers, 7th International Conference on Queueing Theory and Network Applications 2012, August 1-3, 2012, Kyoto, Japan. (2012).

B. Sengupta: Markov processes whose steady state distribution is matrix-exponential with an application to the GI/PH/1 queue, Advances in Applied Probability, vol. 21, pp. 159-180 (1989).

B.D. Choi, B. Kim, and D. Zhu: MAP/M/c queue with constant impatient time, Mathematics of Operations Research, vol. 29, pp. 309-325 (2004).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

K. Kawanishi and T. Takine: MAP/M/c and M/PH/c queues with constant impatience times, Queueing Systems, vol. 82, no. 3, pp. 381-420 (2016).

DOI: 10.1007/s11134-015-9455-9

K. Kawanishi and T. Takine: A note on the virtual waiting time in the stationary PH/M/c+D queue, Journal of Applied Probability, vol. 52, no. 3, pp. 899-903 (2015).

DOI: 10.1017/S002190020011352X

[学会発表](計 2件)

河西憲一: 待ち時間に制約のある複数サーバ待ち行列モデルの解析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会不確実性環境下の意思決定モデリング研究部会, 大阪工業大学うめきたナレッジセンター, 8月28日(2015).

河西憲一, 滝根哲哉: 途中退去のある複数サーバ待ち行列モデルの定常分布, 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列部会, 東京工業大学, 10月18日(2014).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河西 憲一 (KAWANISHI, Ken'ichi)
群馬大学・大学院理工学府・准教授
研究者番号: 50334131