

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 12 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26380399

研究課題名(和文)金利リスク管理への金利期間構造モデルの応用

研究課題名(英文)Application of interest rate models for interest-rate-risk management

研究代表者

安岡 孝司 (Yasuoka, Takashi)

芝浦工業大学・工学マネジメント研究科・教授

研究者番号：80554980

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では金利のリアルワールド(RW)シミュレーションに関する研究を行った。この研究は金融機関での金利リスク評価に応用できるものである。
成果として、ガウシアンHJMモデルでRWシミュレーションの性質を体系的に説明する理論を構築した。これの実用化に向けて、構造がより簡単なHull-Whiteモデルで研究を行った。これらの結果を2本の査読論文に発表し、一連の研究内容を書籍「Interest rate modeling for risk management - Market price of interest rate risk」にまとめて海外出版した。

研究成果の概要(英文)：This project studies real-world simulation of interest rates, which will be applied for the risk management at the financial institution.
As a result, a theoretical framework is successfully developed to explain the property of real-world simulation in the Gaussian HJM model. For practical use, this study is applied for the Hull-White model, which is the most simple interest rate model. These results are published in two papers in peer-reviewed journals, and summarized as an English book "Interest rate modeling for risk management - Market price of interest rate risk" published abroad.

研究分野：金融工学

キーワード：金利リスク評価 リスクの市場価格 リアルワールドシミュレーション 金利期間構造モデル

1. 研究開始当初の背景

金融機関では金利リスク評価のために金利モデルによる金利シミュレーションの導入を検討し始めている。金利モデルはデリバティブの価格計算を目的として発展し、リスク中立測度下での計算が行われていた。一方リスク評価は現実測度下で金利シミュレーションを行うので、このときの金利モデルをリアルワールド(RW)モデルと呼ぶ。RWモデルを実現するための研究が行われていなかったため、実務ではリスク中立測度下のモデルで金利シミュレーションが行われていた。

RWモデルの構築法には市場のオプション価格から構築するフォワードルッキングアプローチと、過去の金利データから構築するバックワードルッキングアプローチの2通りが考えられる。研究代表者はバックワードルッキングアプローチでLIBORマーケット(LM)モデルのRWモデル構築法を研究し、この分野の理論研究が可能になった。LMモデルは金利が正值をとる点で実用性が高いモデルである。しかしその構造が複雑なため、理論の見通しがわかりやすいわけではなかった。そのことから、より簡単な構造のHeath-Jarrow-Morton(HJM)モデルでのRWモデルの研究が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、HJMモデルにおける金利のRWモデルに関する理論構築と実用化研究を進めることである。具体的にはHJMモデルでリスクの市場価格の推定法を構築し、RWモデルの性質を数理的に解明する。

またHJMモデルの特殊ケースとして知られるHull-White(HW)モデルは、構造がさらに簡単で、リスク管理のためのモデルとして広く期待されていることから、同様の研究をHWモデルでも展開する。高次元の柔軟なモデルでは観測期間の特徴的な現象までシミュレーションしてしまう懸念（説明過剰

性）があり、パラメトリックな低次元モデルのほうが安定性に優れるという考え方があるからである。これはHWモデルが実務で使いやすい理由のひとつである。図1は主要な金利モデルの包含関係を便宜的に示す。



図1 金利モデルの関係

3. 研究の方法

(1) HJMモデルでリスクの市場価格を推定
時刻 t における満期 T のフォワードレートを $f(t, T)$ で表す。HJMモデルでは $f(t, T)$ は

$$df(t, T) = \{A + \sigma \cdot \varphi\} dt + \sigma \cdot dZ \quad (1)$$

で表される。ここで

- : ベクトルの内積、
- σ : ボラティリティ、
- A : σ から定まる定数、
- φ : リスクの市場価格、

Z : 現実確率下での d 次元ブラウン運動である。HJMモデルのうち、ボラティリティ $\sigma(t, T)$ が deterministic なとき、ガウシアンHJMモデルという。本研究ではガウシアンHJMモデルでシミュレーション理論の体系化を行う。

ガウシアンHJMモデルで(1)式をオイラー積分によって離散化し、ヒストリカルデータ $\{f(t_i, T)\}_{i=1,2,\dots}$ を適用すると

$$\begin{aligned} \Delta f(t, T) &= f(t_{i+1}, T) - f(t_i, T) \\ &= \{A + \sigma \cdot \varphi\} \Delta t + \sigma \cdot \Delta Z \end{aligned} \quad (2)$$

を得る。リスクの市場価格 φ を観測期間中一定と仮定し、(2)式を近似する最小2乗解として φ を推定する。

研究代表者がすでにLMモデルで展開した議論と平行な考察を行い、この最小2乗解がユニークに存在することを示し、 φ の解析解を導く。解析解 φ の構造を分析し、ヒストリ

カルデータとリスクの市場価格の関係を説明する。

(2) RW シミュレーションの性質

リスクの市場価格の解析解を (2) 式に代入するとリスクの市場価格を消去できる。その結果を簡単に次のように表す。

$$\Delta f(t, T) = B \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta Z \quad (3)$$

RW シミュレーションは (3) 式のモンテカルロシミュレーションで実現できる。ここでドリフト項 B の構造をストリカルデータとの関係で分析し、RW シミュレーションの性質をヒストリカルデータの性状で説明する。

(3) HW モデルへの展開

HJM モデルで展開した理論に基づき、HW モデルのパラメトリックな性質を利用して、リスクの市場価格の解析解と RW シミュレーションモデルをより簡便な形で構築する。

これによって、リスクの市場価格の計算が単純化されるので、さまざまな実証分析が可能になる。

(4) 実証計算

実際の金利データを使ってリスクの市場価格を導き、その値とヒストリカルデータとの関係を分析する。

4. 研究成果

(1) リスクの市場価格の推定

ガウシアン HJM モデルで、リスクの市場価格を観測期間中一定と仮定し、その推定式を次の命題で得た。

命題1 ボラティリティに主成分を使うとき、リスクの市場価格は次で与えられる

$$\varphi_l = \zeta_l / \rho_l, \quad l=1, \dots, d \quad (4)$$

ここで

e^l : 固有ベクトル

$$\sigma_i = \rho_l e^l$$

v_i, σ_i から定まる定数

$$\zeta_l = \sum_{i=1}^n \{ E^H[\Delta F_i / \Delta t] + \sigma_i v_i \} e^l$$

そして、(4)式の解は最尤推定解である。

リスクの市場価格の解析解 (4) 式の統計学的な解釈を与えることも課題だったが、(4)の解が最尤推定解であることを HJM モデルと LM モデルの双方で証明した。これによって(4)式の解析解に統計学的な根拠を与えることができた。

表1 フォワードレート挙動とリスクの市場価格 φ_1, φ_2 の正負

	観察期間の observable trend					
	Bull steep	Steep	Bear steep	Bull flat	Flat	Bear flat
φ_1	-	-	$\doteq 0$	-	-	$\doteq 0$
φ_2	-	-	-	+	+	+

(2) リスクの市場価格の性質

先行研究ではリスクの市場価格を統計ソフトなどを使って計算していたため、リスクの市場価格の性状に関する理論的な研究が進んでいなかった。(4) 式の解析解を得たことで、リスクの市場価格の値を理論的に研究できるようになった。具体的には、観測期間中のフォワードレートの挙動 (Observable trend) とリスクの市場価格の関係を定性的に説明した。その例を表1に示す。

時刻 t におけるフォワードレートの観測値を $f(t, T)$ で表わし、これが定数 $a > 0$ によってつねに

$$f(t, T) = f(t, 0) + aT \quad (5)$$

の形をとるときを Positive slope model と呼ぶ。これはフォワードレートの経験的な観測値の一次近似である。定数 a はフォワードレート曲線の傾きを表し、長短金利差を意味するパラメータでもある。このモデルでは第1主成分が平行移動のみなので、(4) 式の計算はさらに簡単になる。このことから次の結果

を得た。

命題 2 (Negative price tendency)

観測期間の長さ τ を無限に長くとり、観測期間中のボラティリティが定数 σ に収束すると仮定する。またフォワードレートが有界、つまり定数 $c_1, c_2 > 0$ に対して $c_1 < F(t, 0) < c_2$ がつねに成立するとき、次が成立する。

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} = -a/\sigma - (n-1)\delta\sigma/2 \quad (6)$$

ここで δ はグリッドの間隔。

(6)式の右辺はマイナス値なので、命題 2 は長い期間の観測データから推定されるリスクの市場価格はマイナス値をとりやすいことを意味している。この性状を **Negative price tendency** と呼ぶ。これまでの実証研究においては、リスクの市場価格はマイナス値をとるといふ報告がほとんどであった。命題 2 はこの経験知が長期間の観測に起因することを数理的に説明している。

(3) RW モデルの性質

(1)式で、フォワードレートのグリッド数 n と Z の次元 d が一致するケースをフルファクターモデルと呼ぶことにする。(3)式のドリフト項 B を分析し、フルファクターモデルでは B はサンプル期間のフォワードレートの時間当たりの変化を表していることがわかった。これは次の命題として解釈できる。

命題 3 フルファクターガウシアン **HJM** モデルでの **RW** モデルはサンプル期間のヒストリカルなドリフトとボラティリティを持つ確率過程モデルである

命題 3 と類似の結果はすでに **LM** モデルで近似的に得ていたが、ガウシアン **HJM** モデルではより明確な構造で説明できた。命題 3 は低次元のモデルでも近似的に成立することから、「**RW** シミュレーションはサンプル期間のヒストリカルなドリフトとボラティリティを持つ確率モデルである」と近似的に考え

てよいことになる。この命題は **RW** シミュレーションモデルの性質を観測期間の金利状況で説明しているの、実務で **RW** シミュレーションを扱う際に有用な知見を与える。

(4) HW モデルへの展開

HJM モデルでの研究成果の応用として、**HW** モデルでのリスクの市場価格の解析解を導いた。これによってリスクの市場価格の推定が比較的簡便に計算できるようになった。

(5) 実証計算

(5.1) リスクの市場価格の性状

実際の日本円金利データを使って **HJM** モデルでリスクの市場価格を計算した。図 2 はサンプル期間でのフォワードレートの推移を示す。この期間を前後に分割し、**Period A**、**Period B** でリスクの市場価格を命題 1 に基づいて計算した。その結果を表 2 に示す。リスクの市場価格は **Period A**、**B** での金利挙動と表 1 から定性的に推定できるが、表 2 の計算結果は表 1 の関係と整合的であった。

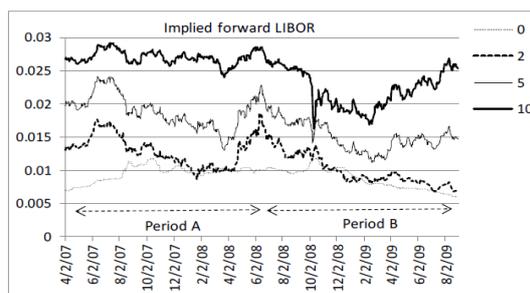


図 2 フォワードレートの推移 円金利
(5.2) リスクの市場価格が正值をとる事例

命題 2 からわかるように、長期の観測でリスクの市場価格が正值をとるケースはまれであり、従来の先行研究ではマイナス値になったケースがほとんどであった。

表 2 リスクの市場価格の計算結果

Period A: 2 Apr 2007 to 16 Jun 2008.

	Eigenvalue ρ^2	Contribution rate	Accumulated contribution rate C	Market price of risk φ	Market price of risk (LMM) φ
1st	7.61E-04	0.9305	0.9305	-0.256	0.038
2nd	4.53E-05	0.0554	0.9859	0.532	0.758
3rd	5.44E-06	0.0067	0.9926	0.598	0.746
4th	3.29E-06	0.0040	0.9966	0.495	0.114
5th	1.22E-06	0.0015	0.9981	0.896	0.205
6th	5.86E-07	0.0007	0.9988	-1.049	1.226

Period B: 16 Jun 2008 to 31 Aug 2009.

	Eigenvalue ρ^2	Contribution rate	Accumulated contribution rate C	Market price of risk φ	Market price of risk (LMM) φ
1st	4.77E-04	0.8082	0.8082	-0.884	-1.094
2nd	8.35E-05	0.1413	0.9495	-1.886	-1.718
3rd	2.38E-05	0.0402	0.9897	-0.816	0.213
4th	3.14E-06	0.0053	0.9950	1.113	2.570
5th	1.31E-06	0.0022	0.9972	2.445	2.089
6th	5.57E-07	0.0009	0.9982	-0.557	0.550

しかし表 1 から金利の急上昇局面ではリスクの市場価格がプラス値をとることが予想できる。これに基づいて米国金利データを分析し、1960 年から 1980 年の 20 年間の観測期間においてリスクの市場価格を命題 1 の方法で計算し、第 1 次のリスクの市場価格 φ_1 がプラス値であることを示した。このような例外的な事例の存在を実証したことにはリスク管理上の重要な知見を与える。

(5.3) リスクの市場価格についての実証分析

従来の金利期間構造の研究ではリスクの市場価格と金利水準との関係が分析されていた。表 1 は金利水準ではなく、金利変動のトレンドがリスクの市場価格の値を支配していることを示す。また(6)式からは、長短金利差に相当するパラメータ a が大きいほど長期観測でのリスクの市場価格はマイナス値が大きくなることがわかる。

これらの関係性を実際のデータで確認するため、米国国債市場の金利データを使い、金利とリスクの市場価格との相関分析を行った。計算ケースが非常に多いため、リスクの市場価格の計算は 1 ファクター HW モデルを用いた。図 3 は使用した米国国債市場のフォワード金利の推移を示す。表 3 は相関分析

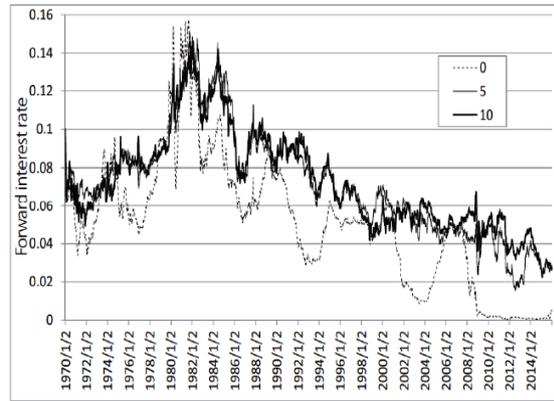


図 3 米国国債市場のフォワード金利

の結果を示す。これによってリスクの市場価格は長短金利差と負の相関関係にあり、金利変化のトレンドと正の相関関係にあることを実証した。またリスクの市場価格と金利水準との相関関係は有意ではなかった。

表 3 リスクの市場価格と金利等との相関

Period length (years)	Number of periods	Case A	Case B	Case C	Case A1	Case A2
		1	3	5	1	1
Volatility parameters	46	15	15	9	23	23
κ		-0.019 (-0.12)	-0.294 (-1.11)	0.047 (-0.12)	-0.034 (-0.16)	0.196 (-0.92)
σ		0.117 (-0.78)	0.206 (-0.76)	0.248 (-0.68)	0.077 (-0.36)	0.24 (-1.13)
Rollled trend	R	0.930*** (-15.6)	0.933*** (-9.33)	0.971*** (-10.8)	0.921*** (-10.8)	0.971*** (-18.7)
Initial yield	6 month	0.069 (-0.46)	0.05 (-0.18)	0.461 (-1.37)	-0.125 (-0.58)	-0.08 (-0.37)
	10 year	-0.067 (-0.45)	-0.037 (-0.13)	0.138 (-0.37)	-0.360* (-1.77)	-0.32 (-1.55)
	Spread	-0.327** (-2.29)	-0.261 (-0.97)	-0.747** (-2.97)	-0.338 (-1.65)	-0.279 (-1.33)
Average yield	6 month	0.179 (-1.21)	0.374 (-1.46)	0.561* (-1.79)	0.096 (-0.44)	0.024 (-0.11)
	10 year	-0.067 (-0.45)	0.197 (-0.72)	0.439 (-1.29)	-0.360* (-1.77)	-0.32 (-1.55)
	Spread	-0.575*** (-4.67)	-0.595** (-2.67)	-0.703** (-2.62)	-0.677*** (-4.21)	-0.479** (-2.50)
Yield change	6 month	0.513*** (-3.96)	0.917*** (-8.31)	0.474 (-1.43)	0.706*** (-4.57)	0.388* (-1.93)
	10 year	0.891*** (-13.03)	0.757*** (-4.18)	0.421 (-1.23)	0.905*** (-9.75)	0.951*** (-14.11)
	Spread	0.248* (-1.7)	-0.11 (-0.40)	0.331 (-0.93)	-0.032 (-0.15)	0.457** (-2.36)
Terminal yield	6 month	0.318** (-2.22)	0.629** (-2.92)	0.670** (-2.39)	0.382* (-1.89)	0.158 (-0.73)
	10 year	0.332** (-2.33)	0.509* (-2.13)	0.701** (-2.6)	0.247 (-1.17)	0.353* (-1.73)
	Spread	-0.09 (-0.60)	-0.440* (-1.67)	-0.28 (-0.77)	-0.360* (-1.77)	0.182 (-0.85)

(6) 研究成果の発信と普及

ガウシアン HJM モデルでの研究と相関分析の研究成果 (それぞれ 5 章①、②) はオープンアクセスの学術論文誌 Quantitative finance letters と Journal of Reviews on Global Economics に公表した。とくに①はすでに 2800 ダウンロードを超え、広く関心を集めている。

これまでの結果を広く発信するため、書籍④に RW モデルの理論体系をまとめ、海外出版した。この本は欧米約 350 の大学図書館などに所蔵され、広く発信することができた。

また RW モデルの考え方を日本語でわかりやすく解説したものを特別寄稿③として国内雑誌に公表した。そしてセミナー会社の企画で 2 回のセミナー⑤⑥を開催し、金融機関からの参加者向けにリアルワールドモデルの説明を行った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① T. Yasuoka; Interest-rate simulation under the real-world measure within a Gaussian HJM framework, *Quantitative Finance Letters*, 3(1) (2015). 10-16
- ② T. Yasuoka; Correlations between the Market Price of Interest Rate Risk and Bond Yields, *Journal of Reviews on Global Economics*, 6 (2017), 208-217.
- ③ 安岡孝司：金利リスク評価のための金利シミュレーションの方法（特別寄稿），*リスクと保険*，11 (2015), 35-65.

[図書] (計 1 件)

- ④ T. Yasuoka; Interest rate modeling for risk management - Market price of interest rate risk *Bentham Science Publ.*, 2015

[その他]

講演

- ⑤ 図解で学ぶ リスク管理実務のための金利モデル入門、シグマインベストメントスクール、2016 年 10 月 27 日
- ⑥ Hull-White model とクレジットエクスポージャ評価の最前線、シグマインベス

トメントスクール、2017 年 8 月 3 日

ホームページ等

- ⑦ <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~yasuoka/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安岡 孝司 (Yasuoka Takashi)

芝浦工業大学大学院 工学マネジメント研究科・教授

研究者番号：80554980