

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：32675
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2014～2016
課題番号：26380402
研究課題名(和文)レヴィ過程によるファイナンス理論の新しい展開に関する研究

研究課題名(英文)A Study of Levy Processes in Finance

研究代表者

山崎 輝(YAMAZAKI, Akira)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60633592

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、レヴィ過程と時間変更レヴィ過程をファイナンスの諸分野に応用することで、正規分布を基礎とする古典的なファイナンス理論の拡張を試みた。レヴィ過程は非正規な確率過程のクラスであり、資産価格や株式配当の非連続的な変動(ジャンプ)を表現できる。また、時間変更レヴィ過程はレヴィ過程に確率的時間変更を導入した確率過程である。本研究では、デリバティブの価格付け、交換経済における資産価格付け、最適配当政策、U字型プライシング・カーネルの再現の4つの問題を扱った。各問題に対して、数理解析による理論研究と数値シミュレーションによる計算研究を実施して論文にまとめた結果、4本の論文が国際学術誌に掲載された。

研究成果の概要(英文)：This study has addressed an application of Levy and time-changed Levy processes to the field of finance and extended classical financial theory based on normal distributions. Levy processes are a class of non-Gaussian stochastic processes for describing jumps in asset price dynamics and dividend streams, and time-changed Levy processes are their generalization with stochastic time change, which can be regarded as a generalization of stochastic volatility. They have been applied to the four problems: path-dependent option pricing, asset pricing in exchange economy, optimal dividend policy for a firm, and reproducing U-shaped pricing kernels. In these problems, analytical representations of derivative prices, asset prices, and decision rules for optimal policy were derived from financial models we proposed. In addition, numerical examples were provided for deeply understanding our mathematical results. As a result, four academic papers were published in international journals.

研究分野：ファイナンス

キーワード：ファイナンス 確率解析 レヴィ過程 時間変更レヴィ過程 デリバティブ 資産価格 最適配当政策
プライシング・カーネル

1. 研究開始当初の背景

2008年のリーマンショック以降、金融実務の枠組みを根本から見直す動きがある。なかでも、金融資産価格の急激かつ突発的な変動をモデル化することで、古典的なファイナンス理論をより現実的な理論に書き換え、金融商品の適切な価格付けや金融リスク管理を実現できる。こうした問題意識に基づき、急激かつ突発的な変動が表現できる確率過程である「レヴィ過程」に着目して、レヴィ過程をファイナンス理論の諸分野へ応用しようとの考えに至った。

2. 研究の目的

本研究は、レヴィ過程とその拡張である時間変更レヴィ過程を資産価格の変動や株式配当の流列に適用することで、古典的なファイナンス理論をより現実に近い理論へと書き換えることが目的であった。レヴィ過程は非正規かつ非連続な経路(パス)を扱える確率過程のクラスの一つであり、金融資産の突発的な変動、すなわちジャンプを表現するのに適した確率モデルである。古典的なファイナンス理論では、ブラック=ショールズ・モデルに代表されるように、金融資産価格の収益率が正規分布に従って連続的に変化していくと仮定されている。ところが実際の金融市場では、金融資産価格は急激かつ突発的に変動し、しばしば価格の急騰や急落が観測され、それが金融市場や実態経済に大きなインパクトを与える。また、過去の実証研究では、金融資産価格の収益率の正規分布や連続変化の仮説は棄却されている。そこで本研究では、レヴィ過程や時間変更レヴィ過程の適用を考えた訳であるが、既にデリバティブ分野では精力的な研究が実施されている一方、まだ手付かずの研究分野も多数存在しているので、ファイナンスの広範な分野への応用を検討するのが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

本研究は、レヴィ過程もしくは時間変更レヴィ過程をファイナンス理論の諸分野へ適用することが目的であったため、「ファイナンス理論の数学的な特徴付け(以下、『理論研究』という)」と「構築したファイナンス理論をコンピュータ上で再現する数値実験(以下、『計算研究』という)」の2つによって研究を進めた。

(1)理論研究では、まず、ファイナンス理論に関する文献に加え、レヴィ過程、確率的最適制御問題、確率的時間変更などの確率解析に関する先行研究を調査した。次に、分析対象となる金融市場の事象を確率モデルとして記述し、数理解析によって定理、命題、補題などを導出することでファイナンス理論としての特徴付けを行った。

(2)計算研究では、理論研究で導出した公式

などをコンピュータ上に実装し、価格精度の検証、計算速度の測定、計算結果の安定性、理論と現実の一致性・相違性、理論理解のための可視化(グラフ化)などを実施した。

4. 研究成果

(1)金融資産価格の収益率が時間変更レヴィ過程(time-changed Levy processes)に従う場合の離散時点観測型の経路依存デリバティブの解析的な価格評価手法を提案した。具体的には、バリア・オプション、ルックバック・オプション、フェイド・イン(アウト)・オプション、フォワード・スタート・オプション、平均オプションに対する包括的な価格評価手法の開発である。この研究成果をまとめた論文は、国際学術論文誌 Applied Mathematical Finance(査読有)に掲載された。なお、本研究は当該科研費獲得前からの継続研究である。

(2)非連続パスを持つ平均回帰過程(単調増加なレヴィ過程を変動因子とするOU過程)をボラティリティ変動モデルに採用した資産価格モデルである Barndorff-Nielsen and Shephard モデルを拡張した一般化 Barndorff-Nielsen and Shephard モデルを提案し、そのモデルの下で各種デリバティブの解析的評価手法を開発した。この一般化モデルでは、オリジナル・モデルにあるブラウン運動の変動因子をレヴィ過程に置き換えることでオリジナル・モデルの欠点(ネガティブ・スキューとなる形状のインプライド・ボラティリティを再現することが困難)を克服し、なおかつ柔軟なモデル選択ができるという汎用性を有する。また、一般化モデルの下でプレーン・バニラ・オプションのみならず、離散時点観測型のバリア・オプションやルックバック・オプションなどの解析的評価手法を開発した。さらには、リスク中立確率の下での資産価格の収益率分布をそのキュムラントの極限値を調べることで特徴付けした。この研究成果をまとめた論文は、国際学術論文誌 International Journal of Theoretical and Applied Finance(査読有)に掲載された。

(3)代表的投資家の期待効用最大化に基づく交換経済の資産価格モデルであるルーカス・モデル(もしくはルーカス・ツリーと呼ばれる)の研究を実施した。本研究では、複数資産の配当流列が非負レヴィ過程(subordinator)や非連続パスを持つ平均回帰過程(非負レヴィ過程を変動因子とするOU過程)で与えられる交換経済を考え、この経済の下での均衡資産価格を求めた。また、この経済の均衡状態における無リスク金利や市場ポートフォリオ、各種資産のベータやアルファを導出し、配当流列のジャンプが経済にどのような影響を与えるのかを理論的に調べた。一連の公式は(逆)ラプラス変換に

よる準解析解として与えられるので、一部の特殊例を除き、数値計算によるコンピュータ・シミュレーションによってこの交換経済の特徴付けを行った。その結果、株式市場のアノマリーとして知られる「小型株効果」が自然に生成されることを示すなど、古典的なファイナンス理論では説明できなかった現象のいくつかを理論モデルで再現した。この研究成果をまとめた論文は、国際学術論文誌 *Annals of Financial Economic* (査読有) に掲載された。また、同内容を大阪大学で開催された中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2014」の招待講演で発表した。

(4) 企業の株式配当の最適化と代表的投資家の期待効用最大化の同時問題の研究に取り組んだ。この問題は2次元ジャンプ拡散過程(レヴィ過程のある種の一般化)における特異確率制御問題(singular stochastic control problem)として定式化された。株式配当の最適化問題に関する多くの先行研究が存在するが、投資家のリスクに対する選好や総消費の動向などのマクロ経済要因は考慮されていなかった。そこで本研究では、総消費をべき乗効用関数で評価する代表的投資家を想定し、その投資家の期待効用最大化によって株式価値が決定される状況を考えた。その一方で、企業はデフォルトするまで株式価値を最大化するような配当政策を実施するものと仮定した。このような状況の下で、株式価値、株式のボラティリティ、均衡金利を求め、市場の均衡状態で株価や金利がどのように振舞うのかを理論的に調べた。その結果、投資家のリスク回避度や総消費の動向が株価形成や配当政策に大きな影響を与えることを証明した。また、企業が一旦配当支払いを停止した後に配当が再開される確率を解析的に求めた。一連の数理解析結果となる公式群をコンピュータ上に実装し、数値実験により可視化(グラフ化)することで現実の市場の動きに整合的であることを説明した。この研究成果をまとめた論文は、国際学術論文誌 *International Journal of Theoretical and Applied Finance* (査読有) に掲載された。

(5) 消費基準の資産価格アプローチ(consumption-based asset pricing approach)によって、U字型プライシング・カーネル(もしくは確率的割引率、stochastic discount factor)を再現できる理論モデルを開発した。古典的な資産価格の理論モデルでは、プライシング・カーネルは市場ポートフォリオのリターンに対して単調減少となることが知られている。ところが、これまでの実証分析では、プライシング・カーネルの形状は株価指数のリターンに対してU字型を描くことが実証されている。この理論と実証の矛盾を解消すべく、本研究では、

U字型のプライシング・カーネルが描ける資産価格の理論モデルを提案した。さらには、リスク中立確率の下での株価指数の収益率分布に対するファットテール性や負の歪度、コール・オプションのアブノーマル・リターンをこの理論モデルで再現できることを示した。本研究では、レヴィ過程の拡張である時間変更レヴィ過程を株価指数の変動因子として採用しており、そのなかでも確率的時間変更がU字型プライシング・カーネルの生成に非常に重要な役割を果たすことを証明した。また、数学的な解析のみならず、数値(逆)フーリエ変換を用いてインプライド・ボラティリティを計算した結果、たとえ実確率の下では株価指数の収益率分布の歪度がゼロであったとしても、インプライド・ボラティリティは負のスキューの形状を描くことを示した。これは実際の株価指数オプション市場で観測される現象である。この研究成果をまとめたワーキングペーパーを、法政大学イノベーションマネジメント研究センターのホームページ上に公開した。また、同論文は現在国際学術論文誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4件)

Akira Yamazaki, Equilibrium Equity Price with Optimal Dividend Policy (旧タイトル: Equilibrium Equity Price with Optimal Dividend Policy under Jump Diffusion Processes), *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 査読有, Vol.20, No.2, 2017, DOI:10.1142/S0219024917500121, <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219024917500121>

Akira Yamazaki, Generalized Barndorff-Nielsen and Shephard Model and Discretely Monitored Option Pricing, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 査読有, Vol.19, No.4, 2016, DOI:10.1142/S0219024916500242, <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219024916500242>

Akira Yamazaki, Asset Pricing with Non-Geometric Type of Dividends (旧タイトル: Lucas Trees with Exponential Utility), *Annals of Financial Economics*, 査読有, Vol.10, No.2, 2015, DOI:10.1142/S2010495215500165, <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S2010495215500165>

Yuji Umezawa, Akira Yamazaki, Pricing Path-Dependent Options with Discrete

Monitoring under Time-Changed Levy Processes, Applied Mathematical Finance, 査読有, Vol.22, No.2, 2015, pp.133-161, <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1350486X.2014.960529>

〔学会発表〕(計 1件)

発表者名: 山寄 輝、発表表題: Lucas Trees with Exponential Utility、学会名等: 中之島ワークショップ「金融工学・数理ファイナンスの諸問題 2014」、発表年月日: 2014年12月4日・5日、発表場所: 大阪大学(大阪府大阪市北区)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

山寄輝研究室ホームページ

<http://akira.yamazaki.com/>

山寄輝 Google Scholar ページ

<https://scholar.google.co.jp/citations?user=g8UV0esAAAAJ&hl=ja>

山寄輝 Social Science Research Network (SSRN) ページ

https://papers.ssrn.com/sol3/cf_dev/AbsByAuth.cfm?per_id=1123259

法政大学イノベーションマネジメント研究センター・ホームページのワーキングペーパー掲載ページ

http://riim.ws.hosei.ac.jp/research/results/working_paper.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山寄 輝 (YAMAZAKI, Akira)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号: 60633592

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

吉川 大介 (YOSHIKAWA, Daisuke)

北海学園大学・経営学部・准教授